Кинематика

1. Материальная точка движется вдоль оси x по закону: $x(t) = Bt + A\cos\omega t$. Найдите проекцию скорости $V_x(t)$.

<u>Решение</u>. По определению: $V_x = \dfrac{dx}{dt}$. Вычисляем производную:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = x' = (Bt + A\cos\omega t)' = B - A\omega\sin\omega t.$$

2. Материальная точка движется вдоль оси x по закону: $x(t) = At + B\sin\omega t$. Найдите проекцию ускорения $a_x(t)$ в зависимости от времени.

<u>Решение.</u> По определению: $V_x = \dfrac{dx}{dt}$, $a_x = \dfrac{dV_x}{dt}$. Вычисляем:

$$V_x = x' = A + B\omega\cos\omega t, \quad a_x = (A + B\omega\cos\omega t)' = -B\omega^2\sin\omega t.$$

3. Задан закон движения частицы в плоскости xy: $\vec{r} = At\cdot\vec{i} + Bt^2\cdot\vec{j}$. Найдите модуль вектора ускорения $a(t)$.

<u>Решение.</u> По определению: $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$. Вычисляем производные:

$$\vec{\upsilon} = (At\cdot\vec{i} + Bt^2\cdot\vec{j})' = A\cdot\vec{i} + 2Bt\cdot\vec{j}, \qquad \vec{a} = (A\cdot\vec{i} + 2Bt\cdot\vec{j})' = 2B\vec{j}$$

а затем модуль вектора ускорения: $a = |\vec{a}| = 2B$.

4. Материальная точка движется вдоль оси x так, что $V_x = At^2$. В начальный момент времени координата точки $x(0) = B$. Найдите $x(t)$.

<u>Решение.</u> По определению: $V_x = \dfrac{dx}{dt}$. В данной задаче $V_x = At^2$, поэтому:

$$\frac{dx}{dt} = At^2$$

Это дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции времени $x(t)$. Для того, чтобы решить это уравнение, сначала «разделим переменные»:

$$dx = At^2 dt$$

(левая часть зависит только от x, а правая – только от t), а затем проинтегрируем:

$$\int dx = \int At^2 dt.$$

Вычисляя интегралы, получим

$$x = \frac{A}{3}t^3 + C,$$

где C - произвольная постоянная, которую найдем условия $x(0) = B$:

$$x(0) = \frac{A}{3}t^3 + C_{|t=0} = C.$$

Итак, $C = B$ и $x = \dfrac{A}{3}t^3 + B$.

5. Закон движения материальной точки дан уравнениями $x = bt$, $y = ct - kt^2$, где b, c и k положительные постоянные. Найдите величину скорости материальной точки как функцию времени.

А)	$\upsilon(t)=b+c-2kt$	Б)	$\upsilon(t)=\sqrt{b^2+(c-2kt)^2}$	В)	$\upsilon(t)=b+c-kt$

Ответ: Б

Решение. Найдем проекции вектора скорости

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=b, \qquad \upsilon_y=\frac{dy}{dt}=c-2kt, \qquad \upsilon_z=0,$$

а затем модуль вектора скорости: $\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2}=\sqrt{b^2+(c-2kt)^2}$.

6. Материальная точка движется в плоскости xy. При этом проекции вектора скорости частицы на координатные оси равны $\upsilon_x=At$, $\upsilon_y=B$. Найдите модуль тангенциального ускорения в зависимости от времени.

А)	$a_\tau=\dfrac{At}{\sqrt{A^2t^2+B^2}}$	Б)	$a_\tau=\dfrac{2A^2t}{\sqrt{A^2t^2-B^2}}$	В)	$a_\tau=\dfrac{2At}{\sqrt{A^2t^2+B^2}}$	Г)	$a_\tau=\dfrac{A^2t}{\sqrt{A^2t^2+B^2}}$

Ответ: Г

Решение. Найдем модуль вектора скорости $\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\sqrt{A^2t^2+B^2}$, а затем тангенциальное ускорение: $a_\tau=\dfrac{d\upsilon}{dt}=\dfrac{A^2t}{\sqrt{A^2t^2+B^2}}$.

7. Материальная точка движется в плоскости xy. Задан закон движения $x(t)=At^3$, $y(t)=Bt^2$. Найдите модуль вектора полного ускорения точки $a(t)$ в зависимости от времени.

Решение. Находим проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}=\left(At^3\right)'=3At^2, \qquad a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}=\left(3At^2\right)'=6At,$$

$$\upsilon_y=\frac{dy}{dt}=\left(Bt^2\right)'=2Bt, \qquad a_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}=(2Bt)'=2B,$$

а затем модуль вектора ускорения: $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(6At)^2+4B^2}$.

Динамика

8. Частица массы m в момент $t=0$ начинает двигаться под действием силы $F_x=F_0\sin\omega t$ вдоль оси x из начала координат, где F_0 и ω - постоянные. Зависимость проекции скорости тела V_x от времени выражается формулой:

А)	$V_x=\dfrac{F_0}{m\omega}(1-\cos\omega t)$	Б)	$V_x=-\dfrac{F_0}{m\omega}\cos\omega t$	В)	$V_x=\dfrac{F_0}{m\omega}\sin\omega t$	Г)	$V_x=\dfrac{F_0}{m\omega}\cos\omega t$

Ответ: А

Решение. Из второго уравнения $m\dfrac{d\upsilon_x}{dt}=F_0\sin\omega t$ следует:

$$md\upsilon_x = F_0 \sin \omega t \cdot dt.$$

После интегрирования получим:

$$m\upsilon_x = -\frac{F_0}{\omega} \cos \omega t + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из начальных условий ($\upsilon_x = 0$ при $t = 0$):

$$0 = -\frac{F_0}{\omega} \cos(0) + C.$$

Окончательно получим: $\upsilon_x = \dfrac{F_0}{m\omega}\left(1 - \cos \omega t\right)$.

9. Материальная точка массы m начинает двигаться в момент $t = 0$ под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos(\omega t)$, где $\vec{F}_0$ - постоянный вектор, $\omega = 0{,}314$ с$^{-1}$. Сколько времени τ материальная точка будет двигаться до второй остановки?

Решение. Интегрируя уравнение

$$m\frac{dV}{dt} = F_0 \cos \omega t,$$

найдем зависимость скорости от времени:

$$mV = \int F_0 \cos \omega t dt = \frac{F_0}{\omega} \sin \omega t + C.$$

Постоянная интегрирования $C = 0$, так как при $t = 0$ скорость равна нулю по условию задачи. Первый раз скорость станет равной нулю при $\omega t = \pi$, второй раз при $\omega t = 2\pi$. Следовательно, $\tau = 2\pi / \omega = 20$ с.

10. Брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45^0$ с горизонтом. Коэффициент трения бруска по плоскости пропорционален времени: $\mu = bt$. Здесь $b =$ 2 с$^{-1}$ – постоянная величина. Найдите время τ, через которое брусок остановится.

Ответ: 1 с.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для проекций векторных величин на ось, направленную вниз вдоль наклонной плоскости:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg \sin \alpha - (bt)mg \cos \alpha.$$

Сокращаем на массу, делим переменные и интегрируем:

$$\int d\upsilon = \int g \sin \alpha dt - \int g \cos \alpha \cdot btdt.$$

Получаем

$$\upsilon = gt\left(\sin \alpha - \frac{bt}{2}\cos \alpha\right) + C.$$

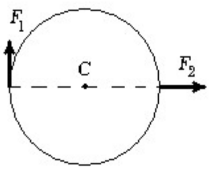
Постоянная интегрирования $C = 0$, так как по условию $\upsilon = 0$ при $t = 0$. Получаем

$$\upsilon = gt\left(\sin \alpha - \frac{bt}{2}\cos \alpha\right).$$

Приравнивая скорость к нулю, находим время движения до остановки: $t = \tau = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{b} = 1$ с.

Центр масс. Импульс. Работа. Энергия

11. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится однородный диск радиуса R и массы m. В некоторый момент времени к диску прикладывают горизонтальные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как показано на рис. Найдите для этого момента времени модуль вектора ускорения точки C.



$F_1 = F_2$

Ответ: $F_1\sqrt{2}/m$

Решение. Точка C совпадает с центром масс диска. В соответствии с теоремой о движении центра масс:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Поэтому

$$a_c = |\vec{a}_c| = \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{m} = \frac{F_1\sqrt{2}}{m}$$

12. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = 2(x/y - y/z)$, где U, x, y, z заданы в СИ. Определите проекцию силы F_x, которая действует на частицу в точке (1, 2, 3).

Ответ: $F \approx 1{,}7$ Н

Решение. $\vec{F} = -grad(U)$, следовательно

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2}{y}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2x}{y^2} + \frac{2}{z}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{2y}{z^2}.$$

В точке с координатами (1,2,3) $F_x = -1$, $F_y = \frac{2}{4} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$, $F_z = -\frac{4}{9}$, $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \approx 1{,}7$ Н

13. Система состоит из двух тел. Известны зависимости от времени импульсов этих тел $\vec{p}_1 = (2t+3)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{p}_2 = -2t\vec{i} + t\vec{j}$. Найдите сумму внешних сил, приложенных к телам, и вычислите ее величину для t = 1/6 с.

Решение

Найдем импульс системы тел:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 3\vec{i} + (3t^2 + t)\vec{j} + 7\vec{k},$$

а затем сумму внешних сил:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = (6t+1)\vec{j}, \; F = 2 \text{ Н}.$$

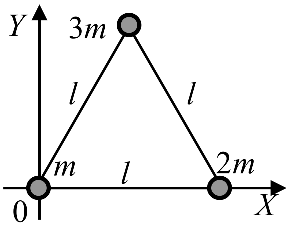
14. Пустая тележка движется по горизонтальным прямолинейным рельсам со скоростью $\upsilon =$ 10 м/с. По ходу движения тележки, над рельсами на достаточной высоте закреплен бункер с песком. В момент прохождения тележки под бункером из него в тележку высыпался песок, масса которого равна массе пустой тележки. Вычислите конечную скорость $\upsilon_к$ тележки. Трением о рельсы и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Направим горизонтальную ось X вдоль начальной скорости тележки. В отсутствии трения и сопротивления воздуха проекция на ось X внешних сил, действующих на систему «тележка-песок», равна нулю. Поэтому проекция импульса системы на эту ось остается неизменной:

$$m\upsilon = (m+m)\upsilon_к .$$

Отсюда $\upsilon_к = \upsilon/2 = 5$ м/с.

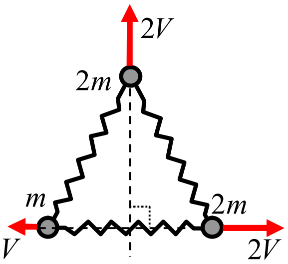
15. Три шарика массами m, $2m$ и $3m$ скреплены тремя легкими стержнями длины l каждый. Определите $y-$координату центра масс этой системы (см. рис.)



Решение

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3ml(\sqrt{3}/2)}{6m} = l\frac{\sqrt{3}}{4}$$

16. Три шарика массами m, $2m$ и $2m$ скреплены тремя легкими пружинами. В некоторый момент времени скорости шариков равны V, $2V$ и $2V$ и направлены, как показано на рисунке. Определите скорость центра масс этой системы, если $V = 3$ м/с.



Ответ: 3 м/с

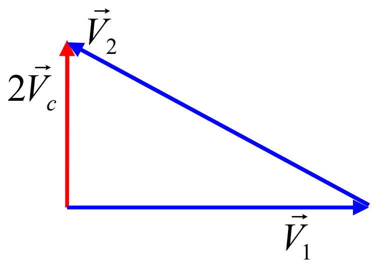
Решение. Воспользуемся формулой $\vec{P} = M\vec{\upsilon}_c$, где $\vec{P}$ - импульс системы тел, M - суммарная масса системы, $\vec{\upsilon}_c$ - скорость центра масс. В данном случае $M = 5m$, $\left|\vec{P}\right| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{(3mV)^2 + (4mV)^2} = 5mV$. Следовательно $\upsilon_c = V$

17. По гладкому горизонтальному столу движутся два одинаковых бруска, соединенные легкой растяжимой нитью. В некоторый момент времени величина скорости центра масс этой системы равна V_c, а величина скорости первого бруска $-V_1$, причем векторы $\vec{V}_c$ и $\vec{V}_1$ взаимно перпендикулярны. Определите для этого момента времени модуль вектора скорости V_2 второго бруска.

Решение Импульс системы можно выразить через скорость центра масс

$$\vec{p} = (m+m)\vec{V}_c$$

или через скорости тел, входящих в систему



$$\vec{p} = m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 .$$

Из этих формул следует (при одинаковых массах)

$$2\vec{V}_c = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 .$$

Изобразим это уравнение графически (см. рис.) и найдем

$$V_2 = \sqrt{(2V_c)^2 + V_1^2} .$$

18. Под действием постоянной силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ небольшое тело совершает перемещение из точки с радиус-вектором $\vec{r}_1 = -\vec{i} + 7\vec{j}$ в точку с радиус-вектором $\vec{r}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Вычислите работу этой силы.

Решение. Работа постоянной силы определяется формулой

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = (3\vec{i} + 4\vec{j})(4\vec{i} - 3\vec{j}) = 0 .$$

Здесь учтено, что $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

19. Небольшое тело движется со скоростью $\vec{\upsilon} = 3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$. под действием силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 4t\vec{j}$. Вычислите мощность этой силы для момента $t = 1$ с.

Решение. По определению мощность силы равна

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon} .$$

Подставляя в выражение для мощности $\vec{\upsilon}$ и $\vec{F}$, получим:

$$N = (3\vec{i} + 4t\vec{j})(3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}) = 9t + 8t^3 = 17 \text{ Вт}.$$

20. Пуля массы $m = 10$ г, перемещаясь практически горизонтально, пробивает доску. В результате ее скорость, равная в начале $\upsilon_1 = 400$ м/с, уменьшается в два раза. Вычислите работу силы сопротивления, которая действует на пулю в доске.

Решение. Работа силы сопротивления равна изменению кинетической энергии:

$$A_{12} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = \frac{m(\upsilon_1/2)^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = -\frac{3}{8} m\upsilon_1^2 = -600 \text{ Дж}.$$

21. Тело массы $m = 1$ кг брошено вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. Высота подъема тела оказалась равной $h = 4$ м. Найдите работу $A_{\text{сопр}}$ силы сопротивления воздуха.

Решение. По теореме об изменении механической энергии

$$E_2 - E_1 = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дисс}},$$

где $E_1 = m\upsilon_0^2/2$ - механическая энергия тела в точке старта, $E_2 = mgh$ - механическая энергия в верхней точке траектории, $A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дисс}} = A_{\text{сопр}}$ - работа внешних и внутренних диссипативных сил. Получаем:

$$A_{\text{сопр}} = mgh - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = -10 \text{ Дж}.$$

22. Пусть m – масса системы тел, $\vec{V}_c$ - скорость ее центра масс. Укажите верные утверждения:

А)	импульс системы $\vec{p} = m\vec{V}_c$
Б)	равнодействующая всех внешних сил, действующих на систему, $\vec{F} = m d\vec{V}_c / dt$
В)	кинетическая энергия системы $T = mV_c^2 / 2$

Ответ: А, Б.

В – ошибочное утверждение, поскольку по теореме Кенига: $T = mV_c^2/2 + \tilde{T}$, где $\tilde{T}$ - кинетическая энергия системы тел в системе отсчета, которая движется поступательно вместе с центром масс.

23. Небольшое тело массы *2m* налетает на покоившееся небольшое тело массы *m*. Происходит абсолютно неупругий удар. Найдите относительное приращение кинетической энергии этой системы тел.

Решение. Считая систему замкнутой, запишем закон сохранения импульса:

$$2m\upsilon_0 = (2m + m)\upsilon,$$

где υ_0 - начальная скорость тела массы $2m$, υ - скорость тел после неупругого соударения. Отсюда следует $\upsilon / \upsilon_0 = 2/3$.

Найдем относительное приращение кинетической энергии системы:

$$\delta T = \frac{(3m\upsilon^2/2) - (2m\upsilon_0^2/2)}{(2m\upsilon_0^2/2)} = \frac{3}{2}\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)^2 - 1 = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

Момент силы. Момент импульса. Момент инерции

24. К материальной точке, радиус-вектор которой относительно начала координат *O* равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = 2\vec{i}$. Вычислите момент $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно точки *O*.

Ответ: $-8\vec{k}$

Момент силы $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8\vec{k}$.

25. Однородный горизонтальный диск массы M =0,5 кг и радиуса $R = 0{,}4$ м раскрутили до угловой скорости $\omega_0 = 10$ рад/с вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. На диск в точку, удаленную от центра на расстояние $r = 0{,}2$ м с малой высоты падает небольшое тяжелое тело массой $m = 1$ кг и прилипает к диску. Вычислите величину конечной кинетической энергии E_k системы.

Ответ: 1 Дж.

Решение. Момент импульса относительно оси вращения сохраняется поскольку момент внешних сил относительно этой оси равен нулю. Следовательно:

$$I_0\omega_0 = I\omega,$$

где

$I_0 = MR^2/2 = 0{,}04$ кг·м^2 - момент инерции диска,

$I = MR^2/2 + mr^2 = 0{,}08$ кг·м^2 - момент инерции диска с прилипшим телом,

ω - конечная угловая скорость.

Выражая ω и подставляя в выражение для кинетической энергии, получим:

$$E_k = I\frac{\omega^2}{2} = \frac{I_0^2\omega_0^2}{2I} = 1 \text{ Дж.}$$

26. К материальной точке, радиус – вектор которой относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = -2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$. Вычислите момент $\vec{M}$ и плечо l силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Решение.

По определению $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$. Вычисляем:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 12{,}5 \cdot \vec{k}.$$

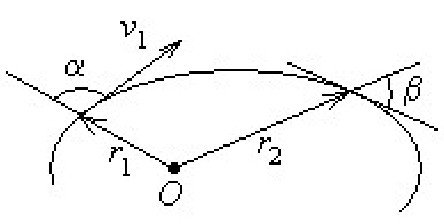
Плечо силы определяется формулой $M = lF$, где $M = |\vec{M}| = 12{,}5$, $F = |\vec{F}| = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = 2{,}5$. Следовательно, $l = M/F = 5$ м.

27. Радиус-вектор материальной точки относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Импульс этой материальной точки равен $\vec{p} = 2\vec{i}$. Вычислите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O.

Решение. По определению $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$. Вычисляем:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \cdot \vec{k}.$$

28. Частица движется в центральном поле сил с центром в точке O (см. рис.). На рисунке показан участок траектории. Считая известными v_1, α, r_1, β и r_2, найдите v_2.



Решение.

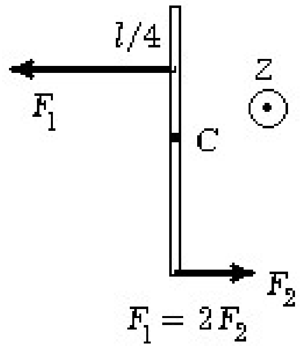
В центральном поле сил момент импульса относительно центра поля (точка O на рис.) сохраняется, поскольку момент центральных сил относительно точки O равен нулю. Проекция момента мпульса на ось Z, проходящую через точку O перпендикулярно плоскости чертежа «от нас», равна:

$$L_z = \upsilon_1 r_1 \sin\alpha = \upsilon_2 r_2 \sin\beta.$$

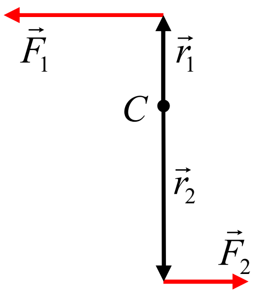
Поэтому

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{r_1}{r_2} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

29. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится однородный стержень длины l и массы m. В некоторый момент времени к стержню прикладывают горизонтальные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как показано на рис. Найдите для этого момента времени величину и направление вектора момента сил, вычисленного относительно точки C.



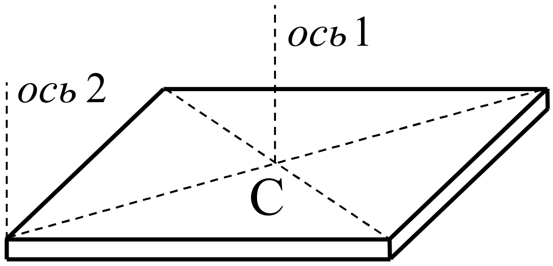
Решение.



Векторы $\vec{M}_1 = [\vec{r}_1 \vec{F}_1]$ и $\vec{M}_2 = [\vec{r}_2 \vec{F}_2]$ направлены «на нас» перпендикулярно плоскости чертежа. Учитывая, что $r_1 = l/4$, $r_2 = l/2$ и $F_1 = 2F_2$, получим

$$M = \frac{l}{4} F_1 + \frac{l}{2} F_2 = F_2 l.$$

30. Найдите момент инерции тонкой однородной прямоугольной пластинки относительно оси, перпендикулярной ее плоскости и проходящей через одну из ее вершин, если известно, что момент инерции пластинки относительно параллельной оси, проходящей через ее центр, находится по формуле $\dfrac{m \cdot \left(a^2 + b^2\right)}{12}$. Масса пластинки m, длины ее сторон a и b.



Решение. Момент инерции относительно оси 1, проходящей через центр масс, равен

$$I_C = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}.$$

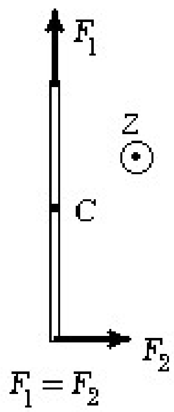
По теореме Штейнера момент инерции относительно оси 2, параллельной оси 1, равен

$$I_2 = I_C + ml^2,$$

где $l = \sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}$ - расстояние между осями. После преобразований получим

$$I_2 = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + b^2\right).$$

31. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится однородный стержень длины l и массы m. В некоторый момент времени к стержню прикладывают горизонтальные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как показано на рис. Найдите для этого момента времени: 1) угол α, который составляет со стержнем вектор $\vec{a}_c$ ускорения центра масс стержня; 2) модуль вектора $\vec{a}_c$.



Решение Воспользуемся теоремой о движении центра масс:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

Отсюда получим для проекций векторных величин на оси X (перпендикулярна стержню) и Y (направлена вдоль стержня):

$$ma_{cx} = F_2 ,$$

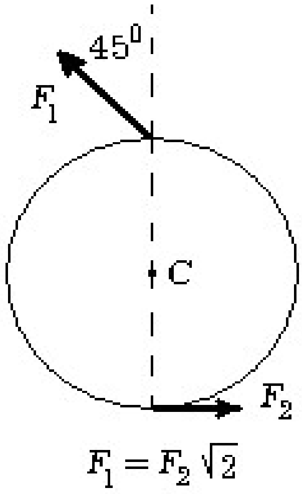
$$ma_{cy} = F_1 .$$

Следовательно,

$$\text{tg}\alpha = \frac{F_1}{F_2} = 1 , \qquad \alpha = 45^0 ,$$

$$| a_c | = \sqrt{a_{cx}^2 + a_{cy}^2} = \frac{1}{m}\sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \frac{F_1\sqrt{2}}{m} .$$

32. На гладкой горизонтальной поверхности стола находится однородный диск радиуса R и массы m, который может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси C, проходящей через центр диска. В некоторый момент времени к диску прикладывают горизонтальные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как показано на рис. Найдите для этого момента времени величину и направление вектора $\vec{\beta}$ углового ускорения диска.



Решение. Запишем уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

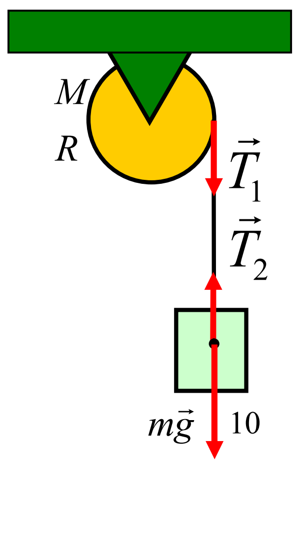
$$I\beta = M ,$$

где $I = mR^2/2$ - момент инерции диска, $M = F_1 R\sin\alpha + F_2 R$ - суммарный момент сил относительно оси вращения. Следовательно

$$\beta = \frac{F_1 R\sin\alpha + F_2 R}{(mR^2/2)} .$$

Учитывая, что $\alpha = \pi/4$ и $F_1 = F_2\sqrt{2}$, получим $\beta = 4F_2/mR$. Вектор $\vec{\beta}$ направлен к читателю.

33. Найдите ускорение груза массой m, прикрепленного к концу легкой нерастяжимой нити, намотанной на блок массы M (рис.). Трением в оси блока пренебречь, считать его сплошным цилиндром радиуса R.



Решение. Груз движется вниз с ускорением $\vec{a}$ под действием сил тяжести и натяжения нити:

$$ma = mg - T_2 ,$$

а блок раскручивается с угловым ускорением β под действием момента силы натяжения нити

$$I\beta = T_1 R,$$

где

$$I = MR^2/2.$$

Поскольку нить невесомая, то

$$T_1 = T_2.$$

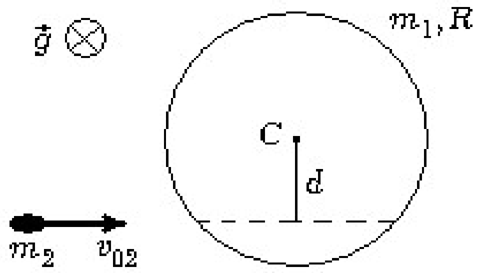
Так как нить нерастяжимая, то

$$a = \beta R.$$

После простых преобразований получим ответ:

$$a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}.$$

34. Однородный цилиндр радиуса R и массы m_1 может вращаться без трения вокруг закрепленной вертикальной оси, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости рис. Пуля массы m_2, летящая горизонтально со скоростью $\vec{v}_{02}$ попадает в боковую поверхность цилиндра, останавливается (см. рис.) и падает вниз. Найдите величину ω угловой скорости, которую получит цилиндр. Прицельное расстояние d считайте заданным.



<u>Решение.</u> Момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю, поэтому момент импульса системы «цилиндр+пуля» остается постоянным. До попадания пули в цилиндр момент импульса этой системы равен $L = m_2 \upsilon_{02} d$, а после остановки пули момент импульса цилиндра, вращающегося с угловой скоростью ω, равен $L = I\omega$, где $I = m_1 R^2/2$. Из уравнения

$$m_2 \upsilon_{02} d = \frac{\omega m_1 R^2}{2}$$

найдем угловую скорость

$$\omega = \frac{2 m_2 \upsilon_{02} d}{m_1 R^2}.$$

35. Вычислите кинетическую энергию тонкого проволочного кольца, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Масса кольца, его радиус и угловая скорость равны соответственно 0,1 кг; 0,1 м; 200 рад/с.

<u>Решение.</u> Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется формулой

$$E_k = I\frac{\omega^2}{2}.$$

Момент инерции кольца вокруг указанной оси равен

$$I = mR^2.$$

Следовательно,

$$E_k = \frac{mR^2\omega^2}{2} = 20 \text{ Дж}.$$

36. Однородный горизонтальный диск массы $m_1 = 0{,}5$ кг и радиуса $R = 0{,}4$ м раскрутили до угловой скорости $\omega_1 = 10\cdot\sqrt{7}$ рад/с вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. На диск положили однородный стержень массы m_2 = 1 кг длиной l = 0,8 м так, что его середина совпала с центром диска. Стержень сразу приклеился к диску. Вычислите величину конечной кинетической энергии системы диск – стержень.

Решение. Момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю, поэтому момент импульса системы «диск-стержень» остается постоянным. В начальный момент времени диск вращается с угловой скоростью ω_1, стержень покоится, суммарный момент импульса системы равен

$$L = I_1\omega_1,$$

где $I_1 = \dfrac{m_1R^2}{2}$ - момент инерции диска. После того, как стержень приклеился к диску, диск и стержень вращаются как единое целое с угловой скоростью ω_2, и момент импульса системы равен

$$L = (I_1 + I_2)\omega_2,$$

где $I_2 = m_2l^2/12$ - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину. Из закона сохранения момента импульса

$$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega_2$$

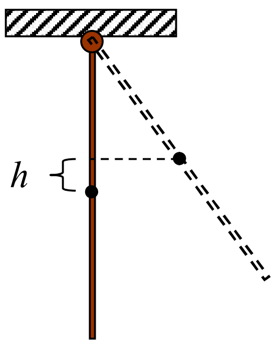
найдем угловую скорость ω_2 и конечную кинетическую энергию

$$E_2 = (I_1 + I_2)\omega_2^2/2.$$

После преобразований получим

$$E_2 = \frac{I_1^2\omega_1^2}{2(I_1 + I_2)} = \frac{3(m_1R^2\omega_1)^2}{2(6m_1R^2 + m_2l^2)} = 6 \text{ Дж}.$$

37. Однородный стержень длины $l = 0{,}6$ м может вращаться без трения в вертикальной плоскости в поле сил тяжести (g = 10 м/с^2) вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. Когда стержень находился в устойчивом равновесном положении, ему сообщили начальную угловую скорость $\omega = 5$ рад/с. Вычислите максимальную высоту, на которую поднимется центр масс стержня.



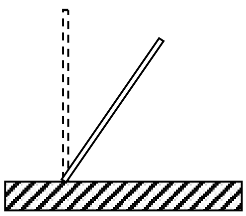
Решение. Запишем закон сохранения механической энергии:

$$\frac{I\omega^2}{2} = mgh,$$

где $I = ml^2/3$ - момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через его конец. Из этого уравнения найдем

$$h = \frac{\omega^2 l^2}{6g} = 0{,}15 \text{ м}.$$

38. Однородный стержень длиной $l = 20$ см одним концом шарнирно прикреплен к горизонтальному столу. Из вертикального положения стержень начинает падать на стол, поворачиваясь в вертикальной плоскости вокруг точки закрепления. Вычислите максимальную величину угловой скорости стержня при его падении. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.



Решение. Запишем закон сохранения энергии:

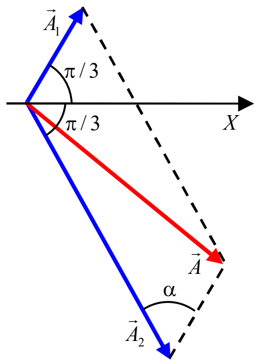
$$mg\frac{l}{2} = I\frac{\omega^2}{2},$$

где $I = ml^2/3$ - момент инерции стержня относительно оси вращения. Отсюда $\omega = \sqrt{3g/l} \approx 12{,}2$ с$^{-1}$.

Колебания

39. С помощью векторной диаграммы найдите амплитуду x_m колебания, являющегося суммой двух колебаний

$$x_1 = 3\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \qquad x_2 = 8\cdot\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$



Решение. Сначала преобразуем x_2:

$$x_2 = 8\cdot\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = 8\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 8\cdot\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right),$$

затем построим векторную диаграмму (рис.): изобразим векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ такие, что $|\vec{A}_1| = 3$, $|\vec{A}_2| = 8$, а углы наклона векторов к оси X равны соответственно $\pi/3$ и $-\pi/3$. Построим вектор $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ и по теореме косинусов найдем модуль этого вектора:

$$x_m = |\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\alpha} = 7 \text{ м}.$$

40. Дифференциальное уравнение, описывающее свободные колебания заряда конденсатора в колебательном контуре, имеет вид $A\ddot{q} + Bq = 0$, где A и B – известные положительные постоянные. Чему равен период T собственных колебаний в контуре?

А)	$T = \sqrt{A/B}$	Б)	$T = 2\pi\sqrt{A/B}$	В)	$T = 2\pi\sqrt{B/A}$	Г)	$T = \sqrt{B/A}$

Ответ: Б

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Следовательно $\omega^2 = B/A$ и период $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{A/B}$.

41. Уравнение движения маятника приведено к виду $\ddot{x} + 10\dot{x} + 425x = 0$. За какое время механическая энергия маятника уменьшится в 2,7 раза ?

Решение. Сопоставляя заданное уравнение с уравнением затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

находим $\beta = 5$. Энергия E затухающих колебаний уменьшается со временем по закону

$$E = E_0 e^{-2\beta t}.$$

Следовательно, в $e \approx 2{,}7$ раз энергия уменьшится при $2\beta t = 1$, то есть за время

$$t = \frac{1}{2\beta} = 0{,}1 \text{ с.}$$

42. Точка совершает затухающие колебания с коэффициентом затухания β и периодом T. За один период амплитуда колебаний уменьшается:

А)	в β раз	Б)	в βT раз	В)	в $e^{\beta T}$ раз	Г)	в $\ln\beta T$ раз

Решение. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается со временем по закону $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$. Следовательно, за время $t = T$ амплитуда колебаний уменьшится в $e^{\beta T}$ раз.

43. Период собственных незатухающих колебаний маятника равен T_0, период затухающих колебаний маятника в некоторой вязкой среде T_1, а резонанс смещения при вынужденных колебаниях маятника в этой среде наблюдается при периоде внешней силы T_2. Укажите правильное соотношение между периодами:

А)	$T_0 < T_1 < T_2$	Б)	$T_0 > T_1 > T_2$	В)	$T_1 > T_0 > T_2$	Г)	$T_1 < T_0 < T_2$

Ответ: А

Решение. Частота затухающих колебаний равна $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а резонансная частота $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, где ω_0 - частота собственных незатухающих колебаний, β - коэффициент затухания. Учитывая, что период обратно пропорционален частоте, получим ответ.

СТО

44. Протон (его масса m) из состояния покоя начинает ускоряться под действием постоянной силы $\vec{F}$. Через время t после начала движения величина скорости протона:

А)	$\upsilon < Ft/m$	Б)	$\upsilon > Ft/m$	В)	$\upsilon = Ft/m$	Г)	$\upsilon = Ft^2/2m$

Ответ: А

Запишем уравнение релятивистской динамики: $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, где $\vec{p} = \dfrac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon^2/c^2)}}$ - релятивистский импульс. Так как сила постоянная и начальная скорость равна нулю, то интегрирование этого уравнения дает: $\vec{p} = \vec{F}t$ и $p^2 = \dfrac{m^2\upsilon^2}{1-\upsilon^2/c^2} = (Ft)^2$. Отсюда получаем ответ.

45. Собственное время жизни некоторой частицы $\Delta t_0 = 10$ нс. Найдите длину пути, который пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни составляет $\Delta t = 20$ нс.

Решение. Время жизни частицы в лабораторной СО:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$

За это время в лабораторной СО частица пролетит путь

$$l = \Delta t \cdot V.$$

Из этих уравнений найдем

$$l = c\sqrt{\Delta t^2 - \Delta t_0^2} \approx 5{,}2 \text{ м.}$$

46. Две частицы движутся друг за другом по одной прямой со скоростями $V = 0{,}75 \cdot c$ относительно лабораторной системы отсчета и попадают в неподвижную мишень с интервалом времени, равным $\Delta t = 50$ нс по лабораторным часам. Найдите собственное расстояние между частицами до попадания в мишень.

Решение

В лабораторной системе отсчета расстояние между частицами $\Delta l = V\Delta t$. Тогда собственное расстояние между частицами

$$\Delta l_0 = \frac{\Delta l}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{V\Delta t}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \approx 17 \text{ м.}$$

47. Импульс частицы равен mc. Во сколько раз полная энергия частицы больше ее энергии покоя?

Решение. По условию релятивистский импульс равен mc:

$$p = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = mc.$$

Следовательно,

$$(\upsilon/c)^2 = 1-(\upsilon/c)^2 \text{ и } (\upsilon/c)^2 = 1/2.$$

Найдем отношение полной энергии к энергии покоя:

$$\delta = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \cdot \frac{1}{mc^2} = \sqrt{2}.$$

48. Покоящаяся частица массы M распадается на две одинаковые невзаимодействующие частицы массы m каждая. При этом:

А)	$m < M/2$	Б)	$m > M/2$	В)	$m = M/2$

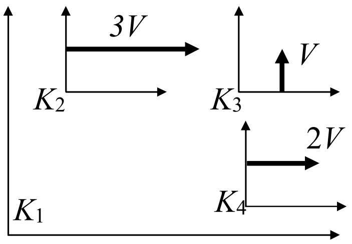
Решение. Релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется. Поэтому скорости образовавшихся при распаде частиц одинаковы по величине и противоположно направлены. Энергия системы также сохраняется:

$$Mc^2 = 2\frac{mc^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}},$$

где υ - скорость каждой частицы. Из этой формулы следует

$$m = \frac{M}{2}\sqrt{1-(\upsilon/c)^2} < \frac{M}{2}$$

49. Время жизни свободной частицы, измеренное в инерциальных системах отсчета K_1, K_2, K_3 и K_4, равно соответственно значениям τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4. Если частица покоится относительно системы отсчета K_1, а системы отсчета K_2, K_3 и K_4 движутся относительно K_1, как показано на рисунке, то:



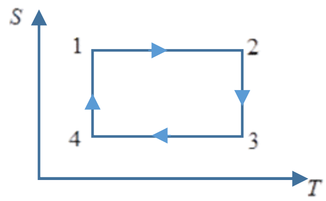
А)	$\tau_1 = \tau_2 < \tau_4 < \tau_3$	В)	$\tau_1 < \tau_3 < \tau_4 < \tau_2$
Б)	$\tau_1 = \tau_2 > \tau_4 > \tau_3$	Г)	$\tau_1 > \tau_3 > \tau_4 > \tau_2$

Ответ: В.

Ответ следует из формулы $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$, определяющей эффект замедления времени

Молекулярная физика

50. На рисунке изображен цикл Карно в координатах (T, S). На каком из участков цикла происходит адиабатическое расширение газа?



А)	1 - 2	Б)	2 - 3	В)	3 - 4	Г)	4 - 1

Ответ: В

Поскольку приращение энтропии $dS = \delta Q/T$ при адиабатическом процессе равно нулю, то адиабатическим процессам соответствуют участки 1-2 и 3-4, когда энтропия постоянна В соответствии с первым началом термодинамики при адиабатическом расширении газ совершает положительную работу и внутренняя энергия уменьшается. Следовательно, уменьшается и температура. Такому процессу соответствует участок 3-4.

51. 10. Пылинки массой $m = 10^{-21}$ кг взвешены в воздухе. Температура воздуха T, постоянная Больцмана k, величина $kT = 4\cdot 10^{-21}$ Дж. Вычислите толщину слоя воздуха, в пределах которого концентрация пылинок различается не более чем на $\delta = 1\%$. Используйте $e^x \approx 1 + x$ при $x << 1$. Ответ запишите в миллиметрах.

Решение. В соответствии с распределением Больцмана:

$$n = n_0 e^{-mgh/kT},$$

$$n(1-\delta) = n_0 e^{-mg(h+\Delta h)/kT} ?$$

где $\delta = 0{,}001$. Разделив второе уравнение на первое, получим

$$1-\delta = e^{-mg\Delta h/kT} \approx 1 - \frac{mg\Delta h}{kT}, \quad \text{следовательно: } \Delta h \approx \frac{kT\delta}{mg} = 4 \text{ мм.}$$

52. ΔN_1 и ΔN_2 - значения числа молекул идеального газа в сосуде, скорости которых отличаются соответственно от $\upsilon_1 = 300$ м/с и от $\upsilon_2 = 600$ м/с на 1%. При некоторой темпе-

ратуре $\Delta N_1 = \Delta N_2$. Определите для этого случая отношение $F(\upsilon_1)/F(\upsilon_2)$ значений функции распределения Максвелла по модулю скорости при скоростях υ_1 и υ_2.

Ответ: 2
Если N - полное число молекул, то $\Delta N_1 = NF(\upsilon_1)\Delta\upsilon_1$, $\Delta N_2 = NF(\upsilon_2)\Delta\upsilon_2$, где $\Delta\upsilon_1 = 2\cdot 0{,}01\upsilon_1$, $\Delta\upsilon_2 = 2\cdot 0{,}01\upsilon_2$. По условию $\Delta N_1 = \Delta N_2$. Отсюда находим $F(\upsilon_1)/F(\upsilon_2) = \upsilon_2/\upsilon_1 = 2$

53. Состояние идеального газа изменяется по циклу Карно. Абсолютная температура нагревателя в 2 раза больше абсолютной температуры холодильника. За один цикл газ совершает работу $A = 12$ кДж. Вычислите работу газа A_{34} при изотермическом сжатии, совершаемую газом в этом цикле.

Решение. Коэффициент полезного действия тепловой машины по определению равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где A - работа, произведенная машиной за цикл, Q_1 - тепло, полученное за цикл от нагревателя. Изменение внутренней энергии за цикл равно нулю, поэтому в соответствии с первым началом термодинамики

$$Q_1 - Q_2 = A, \tag{1}$$

где Q_2 - тепло, отданное за цикл холодильнику. Следовательно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Если тепловая машина работает по циклу Карно, то ее КПД можно выразить формулой

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

где T_1 - температура нагревателя, T_2 - температура холодильника тепловой машины. Следовательно, в этом случае

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{2}$$

В цикле Карно тепло отдается холодильнику при изотермическом сжатии. В этом процессе внутренняя энергия не изменяется и в соответствии с первым началом термодинамики

$$-Q_2 = A. \tag{3}$$

Из уравнений (1)-(3) получим

$$A_{34} = -A\frac{T_2}{T_1 - T_2} = \text{-12 кДж.}$$

54. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = -37$ кДж. При этом она берет тепло от тела с температурой –10 °С и передает тепло телу с температурой 17 °С. Найдите величину тепла Q_2, взятого у холодного тела, и величину тепла Q_1, переданного «горячему» телу.

Решение. Для машины работающей по циклу Карно выполняется условие

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}, \qquad (1)$$

где Q_1 - количество теплоты отданное нагревателю при температуре T_1, а Q_2 - количество теплоты, полученное от холодильника при температуре T_2. За цикл машина совершает отрицательную работу (при этом работа внешних сил положительна)

$$A = Q_2 - Q_1 . \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) найдем

$$Q_2 = -\frac{AT_2}{T_1 - T_2} \approx 360 \text{ кДж}, \quad Q_2 = -\frac{AT_1}{T_1 - T_2} \approx 397 \text{ кДж}.$$

55. Вычислите приращение энтропии 2 молей идеального газа, если в изотермическом процессе объем газа увеличился в 3 раза.

Решение. Приращение энтропии в обратимом процессе определяется формулой

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

При постоянной температуре внутренняя энергия не изменяется и поэтому количество теплоты равно работе газа:

$$\delta Q = \delta A = PdV .$$

Выражая из уравнения состояния давление

$$P = \frac{\nu RT}{V},$$

получим

$$dS = \frac{\nu RdV}{V}.$$

После интегрирования найдем:

$$\Delta S = \nu R \int_V^{3V} \frac{dV}{V} = \nu R \ln V \Big|_V^{3V} = \nu R (\ln 3V - \ln V) = \nu R \ln 3 \approx 18{,}3 \text{ Дж/К}.$$

О замеченных ошибках и опечатках, пожалуйста, мне сообщите.