Динамика твердого тела

<u>Вращение вокруг неподвижной оси.</u> Момент импульса материальной точки относительно оси z равен

$$|L_z| = p_\perp l$$

где l - плечо импульса, $p_\perp$ - составляющая импульса, перпендикулярная оси вращения.

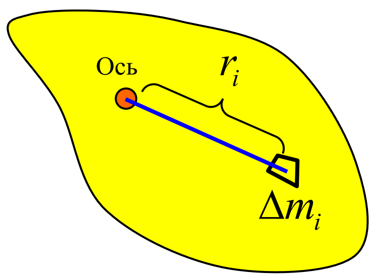
При вращении твердого тела относительно неподвижной оси z с угловой скоростью ω каждый малый фрагмент тела Δm_j движется по окружности радиуса r_j со скоростью $\upsilon_j = \omega r_j$, направленной по касательной к окружности. Поэтому момент импульса такого тела равен

$$|L_z| = \sum r_j \Delta m_j \upsilon_j = \sum \omega \Delta m_j r_j^2 = \omega \sum \Delta m_j r_j^2 , \qquad (1)$$

Величину

$$I_z = \sum \Delta m_j r_j^2 , \qquad (2)$$

называют моментом инерции твердого тела относительно оси z. В этой формуле r_j - расстояние от малого фрагмента тела Δm_j до оси z (рис.). Момент инерции зависит не только от массы тела, но и того, как масса распределена в теле.



Формулу (1) перепишем в виде:

$$L_z = \omega I_z \quad , \qquad (3)$$

где $\omega = \omega_z$ - проекция вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ на ось z.

Продифференцируем (3) по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} .$$

Учтем, что

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z , \quad \frac{d\omega}{dt} = \beta$$

где M_z — момент внешних сил относительно оси вращения, β - угловое ускорение. Получим

$$I_z \beta = M_z . \qquad (4)$$

Это уравнение называют <u>основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси</u>.

Вычислим <u>кинетическую энергию</u> твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$E_k = \sum \frac{\Delta m_j \upsilon_j^2}{2} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_j r_j^2 \quad ,$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad . \qquad (5)$$

<u>Свойства момента инерции.</u> Момент инерции - скалярная аддитивная величина, определяемая формулой

$$I_z = \sum \Delta m_j r_j^2 ,$$

характеризующая распределение массы тела по отношению к оси. Из уравнений (4), (5) видно, что момент инерции является мерой инертности твердого тела при его вращении вокруг оси, т. е. играет ту же роль, что масса для поступательного движения.

Если вещество в теле распределено непрерывно с плотностью ρ, то вычисление момента инерции сводится к вычислению интеграла

$$I_z = \int\limits_V r^2 dm = \int\limits_V r^2 \rho dV \qquad (6)$$

где dm и dV - масса и объем элемента тела, находящегося на расстоянии r от оси z. Интегрирование должно производиться по всему объему тела.

Аналитическое вычисление таких интегралов возможно только в простейших случаях тел правильной геометрической формы. Если твердое тело представляет собой тонкое кольцо радиуса R и массы m, то момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр, равен (рис. 1).

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = mR^2 .$$

При вычислении момента инерции однородного цилиндра (или диска) относительно оси, совпадающей с его осью симметрии (рис.2), следует учесть, что величины r_i в выражении $I = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2$ не равны радиусу диска R, а изменяются для разных элементарных масс Δm_i от 0 до R. После вычисления этой суммы (интегрирования) получим для момента инерции цилиндра

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \int\limits_0^R r^2 \left(\frac{m}{\pi R^2} \right) 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2} ,$$

где m - масса цилиндра.

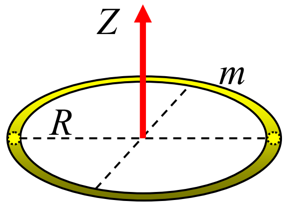


Рис. 1. Момент инерции кольца $I = mR^2$

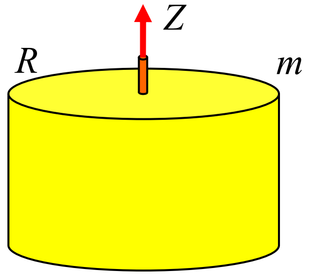


Рис. 2. Момент инерции цилиндра $I = mR^2 / 2$

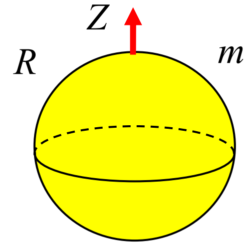


Рис.3 Момент инерции шара $I = (2/5)mR^2$

Вычисление по формуле (2) момента инерции шара массы m и радиуса R относительно оси, проходящей через центр шара (рис.3), дает результат:

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \quad .$$

Другим типовым элементом конструкции твердых тел является стержень. Стержень массы m , имеющий длину L , изображен на рис.5.

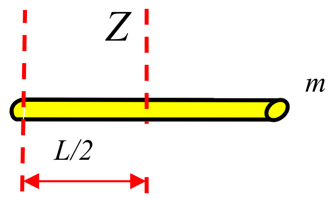


Рис.5 Схематическое изображение стержня

Момент инерции стержня, вычисленный относительно оси Z, проходящей через его центр масс, равен:

$$I = mL^2 / 12$$

Теорема Штейнера. Если определен момент инерции относительно некоторой оси Z, проходящей через центр масс тела, то можно легко вычислить момент инерции относительно любой другой оси, параллельной оси Z. Правила этого расчета сформулированы в теореме Штейнера:

Момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела I_c, и параллельной данной оси, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между осями a^2 :

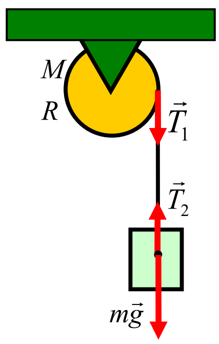
$$I = I_c + ma^2 . \tag{7}$$

Если интересует, например, момент инерции стержня относительно оси Z_1 , проходящей через один из его торцов (рис.5), то, в соответствии с (7):

$$I = mL^2 / 12 + m(L/2)^2 = mL^2 / 3$$

Теорема о взаимно перпендикулярных осях: момент инерции плоского тела относительно произвольной оси z , перпендикулярной его плоскости, равен сумме моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей x и y, лежащих в плоскости тела и пересекающихся с осью z:

$$I_z = I_x + I_y .$$



Пример 1. Найдите ускорение груза массой m , прикрепленного к концу легкой нерастяжимой нити, намотанной на блок массы M (рис.). Трением в оси блока пренебречь, считать его сплошным цилиндром радиуса R .

Решение

Груз движется вниз с ускорением $\vec{a}$ под действием сил тяжести и натяжения нити:

$$ma = mg - T_2,$$

а блок раскручивается с угловым ускорением β под действием момента силы натяжения

$$I\beta = T_1 R,$$

где

$$I = MR^2/2.$$

Поскольку нить невесомая, то

$$T_1 = T_2.$$

Так как нить нерастяжимая, то

$$a = \beta R.$$

После простых преобразований получим ответ:

$$a = \frac{2mg}{2m+M}.$$

Пример 2. В приведенном выше примере найдите скорость груза в момент, когда он по вертикали пройдет расстояние h.

Решение

Воспользуемся законом сохранения энергии:

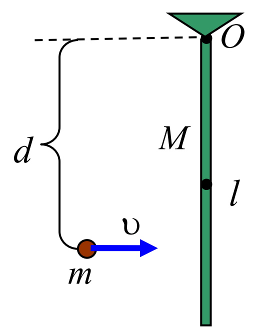
$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Поскольку нить нерастяжима, то $\omega = \upsilon / R$. Следовательно

$$2mgh = m\upsilon^2 + \frac{MR^2}{2}\frac{\upsilon^2}{R^2} = \upsilon^2\left(m + \frac{M}{2}\right)$$

и

$$\upsilon = 2\sqrt{\frac{mgh}{2m+M}}.$$



Пример 3. Тонкий стержень массы M и длины l может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. В стержень попадает упругий шарик массы m, скорость υ которого перед ударом горизонтальна и перпендикулярна стержню. Место удара расположено на расстояние d ниже оси. Определить скорость u шарика сразу после упругого столкновения.

Решение

Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

и закон сохранения момента импульса относительно оси вращения:

$$m\upsilon d = mud + I\omega.$$

Из этой системы уравнений найдем u и ω, в частности

$u = \upsilon\dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$, где $\alpha = 3md^2/Ml^2$. При $\alpha > 1$ шарик после удара будет двигаться в прежнем направлении, при $\alpha < 1$ сменит направление на противоположное, при $\alpha = 1$ остановится.

Плоское движение твердого тела. Плоское движение твердого тела определяют как движение, при котором скорости всех точек тела параллельны некоторой плоскости. Если с любой точкой тела (или его мысленного продолжения) связать поступательно движущуюся систему координат, то относительное движение будет чистым вращением вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости движения.

Плоское движение можно рассматривать как суперпозицию поступательного движения центра масс и вращательного движения в системе центра масс. Движение центра масс описывается вторым законом Ньютона и определяется результирующей внешней силой

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{внеш}.$$

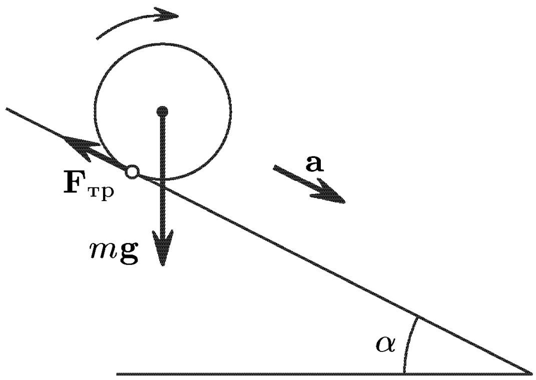
Вращательное движение в системе центра масс подчиняется уравнению

$$M_z = I_z\beta,$$

в котором надо учитывать только реальные внешние силы, так как момент сил инерции относительно центра масс равен нулю (аналогично моменту сил тяжести). Кинетическая энергия плоского движения равна

$$E_к = \frac{1}{2}m\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2.$$

Пример 4. Найдем ускорение сплошного цилиндра, который скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости.



Решение

Уравнения движения имеют вид (рис.):

$$ma = mg\sin\alpha - F_{тр},$$

$$I\beta = F_{тр}R.$$

Условие отсутствия проскальзывания $\upsilon = \omega R$ приводит к выражению

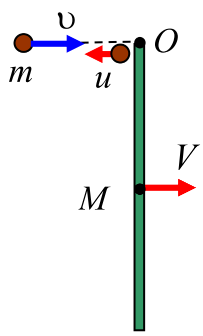
$$a = \beta R.$$

Решая систему уравнений, получим

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + \left(I/mR^2\right)}.$$

Учитывая, что $I = mR^2/2$, найдем $a = (2/3)g\sin\alpha$.

Пример 5. Шарик массой m упруго сталкивается с неподвижным стержнем массой M и длиной l, как показано на рисунке. Начальная скорость шарика υ перпендикулярна стержню. Шарик попадает в край стержня. Определите скорость центра масс стержня и его угловую скорость после удара. Силу тяжести не учитывать.



Решение

Запишем уравнения, выражающие законы сохранения импульса, энергии и момента импульса относительно точки O (рис.):

$$m\upsilon = -mu + MV,$$

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

$$0 = MV(l/2) - I\omega,$$

где $I = Ml^2/12$. Из этих трех уравнений найдем три неизвестные u, V и ω. При вычислении кинетической энергии стержня мы воспользовались теоремой Кёнига

$$E_k = \frac{MV^2}{2} + \tilde{E}_k,$$

где $\tilde{E}_k = I\omega^2/2$ - кинетическая энергия в системе центра масс. Аналогичной теоремой мы воспользовались при вычислении момента импульса стержня:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] + \tilde{\vec{L}},$$

где $\tilde{\vec{L}}$ - момент импульса в системе центра масс, $\left|\tilde{\vec{L}}\right| = I\omega$.

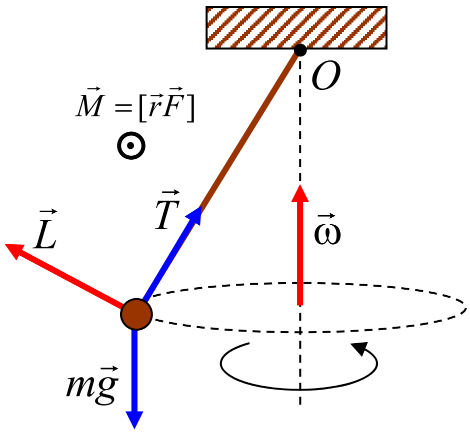
Движение с неподвижной точкой

Уравнение движения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш},$$

позволяет узнать, как изменяется момент импульса $\vec{L}$. Так как вектор $\vec{L}$ в общем случае не параллелен вектору $\vec{\omega}$, то для замыкания уравнений движения следует найти связь между этими величинами.

Например, при вращении шарика, подвешенного на легкой нити («конический маятник», рис.), момент импульса относительно точки подвеса O $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$ направлен перпендикулярно нити, то есть под углом к оси вращения и сам вектор $\vec{L}$ вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$.



Проблему связи между $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ решает теорема о главных осях инерции, утверждающая, что для любой точки тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, при вращении относительно которых вектор $\vec{L}$ параллелен оси вращения:

$$\vec{L}_1 = I_1\vec{\omega}_1, \quad \vec{L}_2 = I_2\vec{\omega}_2, \quad \vec{L}_3 = I_3\vec{\omega}_3$$

Моменты инерции относительно этих осей называют главными моментами инерции. Если вращение происходит вокруг произвольной оси вращения, то, разложив угловую скорость по главным осям

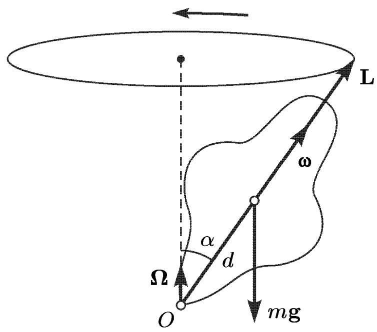
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

мы сможем вычислить момент импульса:

$$\vec{L} = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + I_3\vec{\omega}_3$$

Если главные оси проведены через центр масс тела, то их называют свободными осями. При вращении вокруг любой из свободных осей сохраняются как импульс, так и момент импульса тела, т. е. для поддержания вращения к телу не надо прикладывать ни внешнюю силу, ни внешний момент сил. При свободном вращении устойчивым оказывается только вращение относительно двух свободных осей — с минимальным и максимальным главными моментами инерции.

Гироскопы. Гироскопом называют твердое тело, быстро вращающееся относительно своей оси симметрии. Задачу о движении оси гироскопа можно решать в гироскопическом приближении:



$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

оба вектора направлены вдоль оси симметрии. Уравновешенный гироскоп (закрепленный в центре масс) обладает свойством безынерционности: его ось перестает двигаться, как только исчезает внешнее воздействие ($\vec{M}$ обращается в нуль). Это позволяет использовать гироскоп для сохранения ориентации в пространстве. На тяжелый гироскоп (рис.), у которого центр масс смещен на расстояние d от точки закрепления, действует момент силы тяжести, направленный перпендикулярно $\vec{L}$. Так как

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \perp \vec{L},$$

то $\vec{L}$ и ось гироскопа совершают регулярное вращение вокруг вертикальной оси (прецессия гироскопа). Конец вектора $\vec{L}$ вращается по горизонтальной окружности радиусом $L\sin\alpha$ с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{|d\vec{L}/dt|}{L\sin\alpha} = \frac{mgd\sin\alpha}{I\omega\sin\alpha} = \frac{mgd}{I\omega}.$$

Угловая скорость прецессии не зависит от угла наклона оси α.

Собственное вращение и прецессия симметричного гироскопа могут сопровождаться т.н. нутациями – быстрыми коническими движениями оси гироскопа. Угол конуса , как правило, бывает очень мал и нутации воспринимаются как дрожание оси. Из-а сил сопротивления нутации обычно быстро затухают.

Демонстрации

1. Человек с гантелями на скамье Жуковского.

   http://www.youtube.com/watch?v=8BB5sWXBKos 0:46

2. Человек на скамье Жуковского с велосипедным колесом.
3. http://www.youtube.com/watch?v=nR_E-Zmqq4M 1:28
4. Бросание параллелепипеда.
   http://www.youtube.com/watch?v=Uu9R4u0f2zA 2:11
5. Устойчивость вращения: Вращение стержня, подвешенного на нити.
   http://www.youtube.com/watch?v=SU7TBOidUnI 2:00
6. Устойчивость вращения: Вращение диска, подвешенного на нити.
   http://www.youtube.com/watch?v=6hgvPuyPoM0 1:20
7. Устойчивость вращения: Вращение цепочки, подвешенного на нити.
   http://www.youtube.com/watch?v=rpnoq9hz1gw 1:12
8. «Китайский волчок».
9. «Непослушная катушка»
10. Эффект Джанибекова
http://www.youtube.com/watch?v=LzVItPwiQyI 3:44
http://www.youtube.com/watch?v=60iBwQwAnqo 4:00
11.
12.