

ЛАБОРАТОРИЯ "КВАНТА"

Зависимость периода колебаний маятника от амплитуды

И.ГОРБАТЫЙ

Во дворе вверх колесами, опираясь на седло и руль, стоял велосипед. Мальчик закончил ремонт колеса и теперь с сосредоточенным видом следил за его медленным вращением. Взгляд мальчика прикован к "ниппелю" - небольшому соску для подсоединения насоса. Вот ниппель поднялся вверх, перевалил через верхнюю точку и начал опускаться, ускоряя вращения колеса. Но через некоторое время на очередной оборот энергии уже не хватило, колесо на мгновение остановилось, немного не дотавив ниппель до верхней точки, и стало поворачиваться в обратную сторону, постепенно набирая скорость - вращение колеса сменилось его колебаниями. "Когда колебания прекратятся, ниппель внизу должен быть" - сказал мальчик - "или я плохо почистил и смазал втулку".

Маятником, точнее физическим маятником, называют твердое тело произвольной формы, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Простейшим маятником является груз малых размеров, закрепленный на длинной легкой нити (или стержне). Если можно пренебречь массой нити по сравнению с массой груза, деформацией нити, а также размерами груза по сравнению с длиной нити, то такой маятник называют математическим. При *малых* углах α отклонения маятника от положения равновесия, как известно, его колебания являются гармоническими, т.е. описываются формулой

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где α_m - максимальный угол отклонения от положения равновесия (угловая амплитуда), φ_0 - начальная фаза, $\omega = \sqrt{g/l}$ - циклическая частота, l - длина нити, g - ускорение свободного падения. Период малых колебаний математического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{l/g} \quad (2)$$

не зависит от амплитуды α_m . Такое свойство колебаний - независимость периода от амплитуды - называют изохронностью колебаний. На изохронность малых колебаний обратил внимание еще Галилей, наблюдая за люстрой в соборе, а в 1957 г по чертежу Гюйгенса были сконструированы часы, ход которых регулировался маятником.

Возникает вопрос: насколько малой должна быть амплитуда колебаний маятника α_m , чтобы его колебания можно было считать изохронными? Например, угол 30° можно считать малым? а угол 15° ? Применительно к математическому маятнику можно

спросить и иначе: при каких амплитудах колебаний можно пользоваться формулой (2) для расчета периода?

Ответ на эти вопросы, конечно, зависит от того, какую точность мы имеем в виду при определении периода. Например, если нас устраивает погрешность в 2%, то колебания маятника можно считать изохронными, а формулу (2) справедливой при бо'льших угловых амплитудах, чем при допустимой погрешности в 0,1% .

Ясно, что для ответа на поставленные вопросы необходимо исследовать зависимость периода колебаний маятника от амплитуды при произвольных, не обязательно малых, ее значениях. Начнем с простого эксперимента, а затем проведем теоретический расчет зависимости T от α_m .

Эксперимент

Зависимость $T(\alpha_m)$ желательно измерить как можно в большем диапазоне изменения угловых амплитуд. Затухание колебаний в эксперименте должно быть достаточно малым: во всяком случае за один период колебаний амплитуда не должна заметно уменьшаться.

Для наших целей удобно взять в качестве маятника обычное велосипедное колесо. Хороший подшипник обеспечивает малое затухание колебаний, колебания происходят довольно медленно, а их амплитуду можно менять в широких пределах, вплоть до 180^0 . По спицам удобно отсчитывать углы отклонения от положения равновесия (на колесе моего велосипеда имеется 36 спиц - отличный транспортир с ценой деления в 10^0).

Колесо совершает колебания, если его центр тяжести несколько смещен относительно оси вращения. Обычно это выполняется за счет не совсем точной "центровки" колеса, а также из-за наличия "ниппеля" - небольшого соска для подсоединения к колесу насоса. Можно дополнительно сместить центр тяжести колеса, утяжелив обод в некотором месте. Для этого мы прикрепили скотчем к ободу колеса груз небольших размеров массой около килограмма. При этом возросла сила, возвращающая колесо к положению равновесия (точнее, момент силы), поэтому период колебаний уменьшился. Одновременно уменьшилось и затухание колебаний, поскольку возросла инерционность колеса. Мы поняли, что имеет смысл прикрутить еще один груз почти такой же массы, что и первый, в диаметрально противоположном месте (см. рис.1). Затухание еще больше уменьшилось, а период колебаний увеличился, что удобно для измерений.

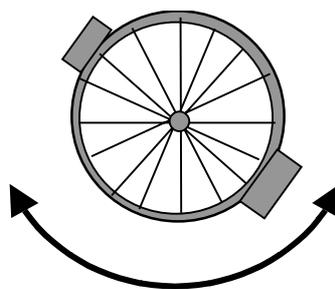


Рис.1. Велосипедное колесо - физический маятник

Время измерялось обычным секундомером с ценой деления 0,2 с. Результаты измерений приведены на рис. 2. Видно, что период колебаний монотонно увеличивается с ростом амплитуды. При малых амплитудах эта зависимость выражена слабо: так при увеличении амплитуды от предельно малых углов до $\alpha_m = 60^\circ$ период колебаний увеличивается не более, чем на 10%, а при амплитуде $\alpha_m = 90^\circ$ увеличение периода колебаний составляет около 20%. Резкое увеличение периода колебаний наблюдается при приближении угловой амплитуды к 180° . Так при $\alpha_m = 160^\circ$ период колебаний увеличился почти в 2 раза по сравнению с периодом малых колебаний.

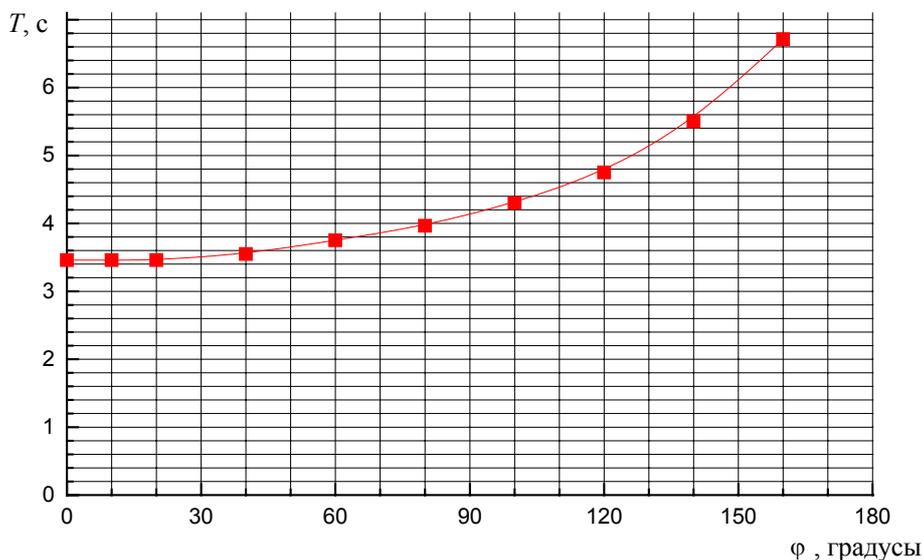


Рис.2. Зависимость периода колебаний от амплитуды (эксперимент).

Мы измерили зависимость периода колебаний от амплитуды для некоторого конкретного колеса-маятника с какими-то грузами-противовесами, прикрученными к нему. Однако, как будет показано далее, полученные результаты могут быть представ-

лены в таком виде, что они окажутся справедливыми для любого физического маятника.

Теория

Положение твердого тела (маятника), которое может качаться вокруг горизонтальной оси O , в каждый момент времени будем характеризовать углом отклонения α из положения равновесия (рис.3). Каждая точка маятника движется по окружности с угловой скоростью $\omega = \dot{\alpha} = d\alpha / dt$.

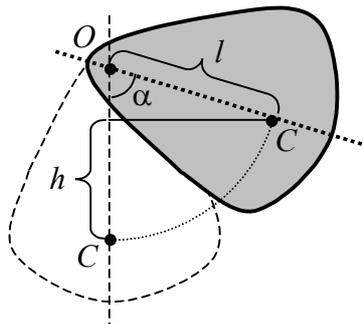


Рис. 3. Физический маятник

Линейные скорости различных точек маятника различны и определяются расстоянием r от оси вращения: $V = \omega r$. Поэтому кинетическая энергия маятника, вращающегося в данный момент с угловой скоростью ω , равна

$$E_{\text{кин}} = \sum \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} = \sum \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i r_i^2$$

где Δm_i - масса очень малого фрагмента твердого тела, удаленного от оси вращения на расстояние r_i и имеющего скорость V_i . Величина $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ зависит от распределения масс в твердом теле и положения оси вращения. Эту величину называют моментом инерции твердого тела относительно данной оси.

Для потенциальной энергии маятника можно записать

$$E_{\text{пот}} = mgh,$$

где h - высота поднятия центра масс C над самым нижним его положением. Из рисунка видно, что $h = l(1 - \cos \alpha)$, где l - расстояние от оси вращения до центра масс маятника.

Если силами трения и сопротивления можно пренебречь, то полная механическая энергия маятника

$$E = \frac{I}{2}(\dot{\alpha})^2 + mgl(1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

остаётся постоянной и, следовательно, её производная по времени равна нулю. Дифференцируя (3), найдем

$$dE/dt = I\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mgl\dot{\alpha} \sin \alpha = 0.$$

Отсюда получим дифференциальное уравнение

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0, \quad (4)$$

относительно неизвестной функции времени $\alpha = \alpha(t)$. В уравнении (4) введено обозначение $\omega_0^2 = mgl/I$.

Если при малых углах отклонения считать $\sin \alpha \approx \alpha$, то уравнение (4) принимает вид

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (5)$$

Решением этого уравнения является функция $\alpha = \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, в чем легко убедиться, вычислив вторую производную $\ddot{\alpha} = -\omega_0^2 \alpha_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 \alpha$ и подставив ее в уравнение (5) - оно обратится в тождество. Таким образом, при достаточно малых амплитудах колебаний, когда $\sin \alpha \approx \alpha$, колебания маятника являются гармоническими, а период таких малых колебаний (обозначим его T_0) не зависит от амплитуды и определяется формулой

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (6)$$

В частности, для математического маятника $I = ml^2$ и $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$, а для шарнирно закрепленной за один конец однородной палочки массы m и длины L : $I = mL^2/3$, $l = L/2$, $T_0 = 2\pi\sqrt{2L/3g}$.

Для произвольных углов отклонения α выразить решение уравнения (4) в элементарных функциях не удастся. Однако уравнение можно решить численно. Существуют различные алгоритмы решения. Самый простой алгоритм может быть осуществлен следующим образом. Зададим некоторые значения угла $\alpha = \alpha_1$ и угловой скорости $\dot{\alpha} = \omega_1$ в начальный момент времени. При помощи (4), вычислим угловое ускорение

$\beta_1 = \ddot{\alpha} = -\omega_0^2 \sin \alpha_1$ в этот начальный момент и рассчитаем угол α_2 и угловую скорость ω_2 через малый промежуток времени Δt :

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega_1 \Delta t + \frac{\beta_1 \Delta t^2}{2}, \quad \omega_2 = \omega_1 + \beta \Delta t .$$

Далее вычислим угловое ускорение $\beta_2 = -\omega_0^2 \sin \alpha_2$ в момент $t = \Delta t$, а затем угол и угловую скорость в следующий момент времени $t = 2\Delta t$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega_2 \Delta t + \frac{\beta_2 \Delta t^2}{2}, \quad \omega_3 = \omega_2 + \beta \Delta t ,$$

и так далее. Приведенный алгоритм не очень эффективен, поскольку нужно брать очень малый временной шаг Δt , чтобы избежать накопления ошибок при многократных повторных вычислениях. Обычно используют другие, более рациональные схемы решения дифференциальных уравнений, в которых ошибки, возникающие на каждом шаге частично компенсируются.

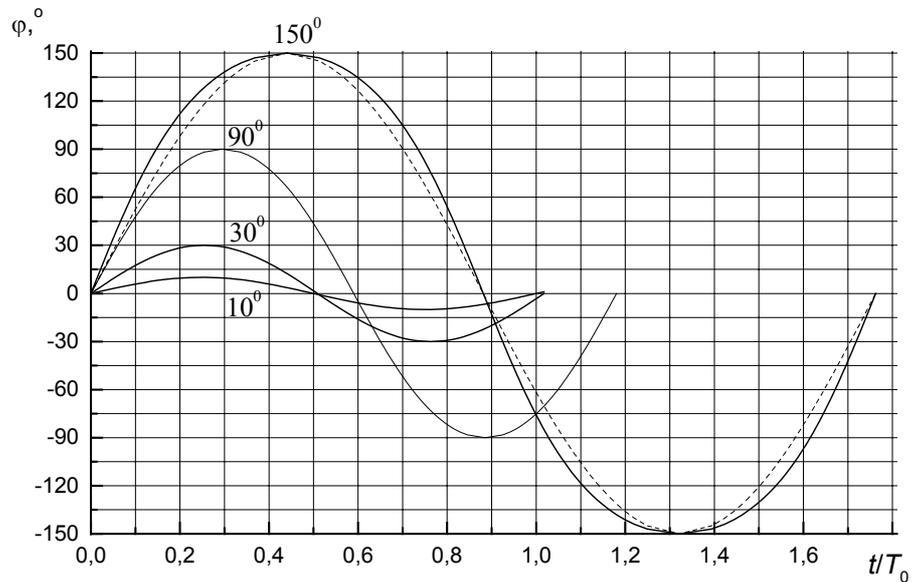


Рис. 4. Зависимость угла отклонения физического маятника от времени при различных угловых амплитудах колебаний

На рис. 4 приведены результаты численного решения уравнения (4) для нескольких значений амплитуды α_m . Заметим, что форма колебаний остается близкой к синусоидальной даже при весьма больших амплитудах. Так при $\alpha_m = 150^\circ$ отклонения от синусоидальной формы весьма незначительны (штриховая кривая на рис. 4 расчи-

тана по формуле $\alpha = 150^0 \sin(2\pi t/T)$, а при $\alpha_m = 90^0$ отклонений от синусоидальной зависимости при выбранном на рис. 4 масштабе вообще не заметно. Период колебаний, как видно, увеличивается с ростом угловой амплитуды.

Расчетная зависимость периода колебаний от амплитуды изображена на рис.5 сплошной линией. По оси ординат отложены значения не самого периода колебаний T , а отношения T/T_0 , где T_0 - период колебаний при предельно малых амплитудах. Такой переход к безразмерной переменной позволяет применять результаты наших расчетов к любому физическому маятнику. Иными словами, приведенные на рисунках 4, 5 расчетные кривые будут выглядеть совершенно одинаково для всех физических маятников, а различаться будут лишь значения периодов малых колебаний T_0 .

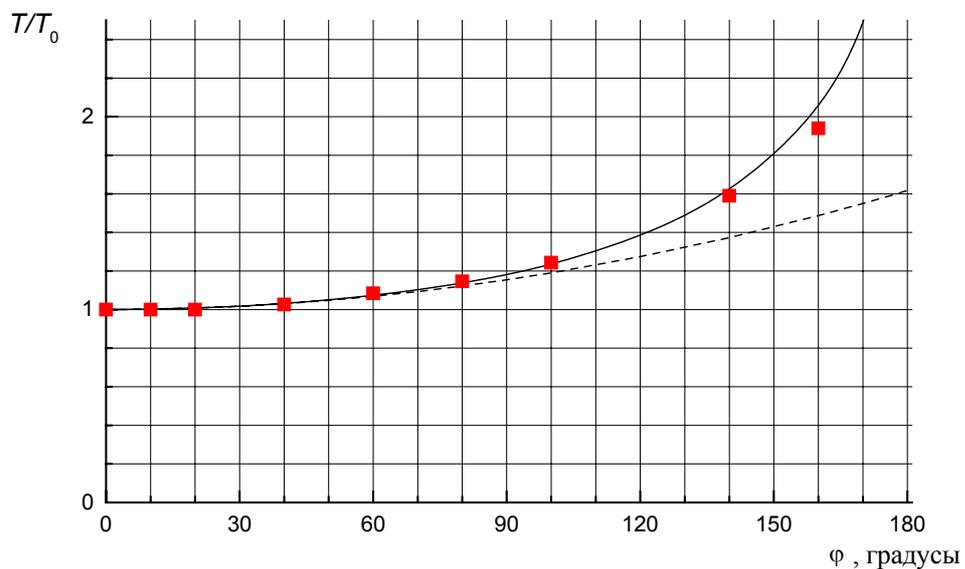


Рис.5. Точки - эксперимент, сплошная - теория, штриховая - расчет по формуле (10)

На графике рис.5 нанесены также точки, полученные по результатам наших экспериментов с колесом-маятником. Видно, что согласие эксперимента и теории удовлетворительное - расхождения находятся в пределах погрешностей эксперимента.

Приближение малых углов

Итак, точное численное решение уравнения (4) показывает, что колебания маятника, строго говоря, не являются изохронными - период колебаний монотонно увеличивается с ростом амплитуды. Однако при малых угловых амплитудах зависимость периода от амплитуды выражена слабо. Так, например, при угловой амплитуде

$\alpha_m = 30^0$ период колебаний превышает период колебаний T_0 с предельно малой амплитудой не более, чем на 2 %, а для $\alpha_m = 90^0$ превышение периода составляет примерно 20 %. Если говорить о математическом маятнике, то именно такие погрешности будет давать формула (2) при вычислении периода с указанными выше амплитудами.

На этом можно было бы завершить наши исследования зависимости периода колебаний от амплитуды. Исчерпывающие результаты приведены на графике рис.5. Однако зависимости, представленные в виде таблиц значений или построенных по этим таблицам графиков, всегда менее информативны и удобны, чем формулы, выражающие те же зависимости. Далее мы получим приближенное выражение для периода колебаний, учитывающее в отличие от (6) зависимость периода от угловой амплитуды.

Уравнение (5) получено с использованием приближения малых углов $\sin \alpha \approx \alpha$. В результате получилось выражение для периода колебаний, не зависящее от амплитуды. Чтобы получить более точное выражение для периода нужно взять более точное приближение для $\sin \alpha$.

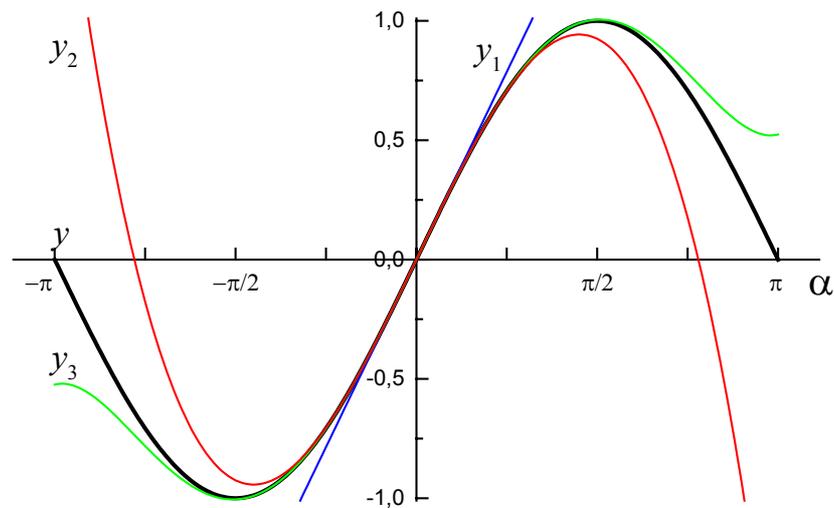


Рис. 6. Графики зависимостей

$$y = \sin \alpha, \quad y_1 = \alpha, \quad y_2 = \alpha - (\alpha^3 / 3!), \quad y_3 = \alpha - (\alpha^3 / 3!) + (\alpha^5 / 5!)$$

Откуда вообще берется приближенная формула $\sin \alpha \approx \alpha$? Оказывается, что для любого угла α (здесь и далее он выражен в радианах) $\sin \alpha$ можно представить в виде суммы бесконечного числа слагаемых :

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots \quad (7)$$

(это разложение функции $f(\alpha) = \sin \alpha$ в ряд Тейлора вблизи точки $\alpha = 0$). В большинстве случаев можно ограничиться рассмотрением углов из диапазона $-\pi \leq \alpha \leq \pi$. Тогда слагаемые в сумме быстро убывают и для достижения заданной точности обычно достаточно вычислить сумму всего нескольких слагаемых.

На рис.6 приведены графики зависимостей от α функций $y = \sin \alpha$, $y_1 = \alpha$, $y_2 = \alpha - (\alpha^3 / 3!)$ и $y_3 = \alpha - (\alpha^3 / 3!) + (\alpha^5 / 5!)$. Видно, что первое приближение y_1 дает хорошую точность только при достаточно малых α . Следующие приближения "работают" при больших углах. Разложение функций в подобные ряды (ряды Тейлора) широко используется в математике и физике.

Когда мы сохранили в сумме (7) лишь первое слагаемое, то получили решение уравнения (4) в виде гармонических колебаний с независимым от амплитуды периодом. Если сохранить и второе слагаемое в сумме, то решение будет более точным, в частности, оно должно учитывать зависимость периода колебаний от амплитуды. Уравнение (4) в этом случае принимает вид

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) = 0 \quad (8)$$

К сожалению решение этого уравнения также не удастся выразить в элементарных функциях. Получим приближенную формулу для периода колебаний, основываясь на допущении о том, что колебания имеют синусоидальную (или близкую к ней) форму

$$\alpha \approx \alpha_m \sin \omega t \quad (9)$$

с неизвестной частотой ω , зависящей от амплитуды α_m . Основанием для такого приближения являются приведенные на рис. 4 результаты численных расчетов: видно, что форма колебаний остается близкой к синусоидальной при весьма больших амплитудах, когда зависимость периода от амплитуды уже проявляется достаточно заметно. Иными словами, рассматриваются такие амплитуды, когда колебания еще являются синусоидальными, но уже не изохронными.

Частоту ω можно было бы искать из условия обращения уравнения (8) в тождество при подстановке решения (9). Но, так как синусоидальный закон (9) выполняется лишь приближенно, то тождества при подстановке (9) в (8) не получится. Действительно, левая часть уравнения (8) (обозначим ее $f(t)$) равна

$$f(t) = (\alpha_m \sin \omega t)'' + \omega_0^2 \alpha_m \sin \omega t - \frac{\omega_0^2}{6} \alpha_m^3 \sin^3 \omega t .$$

Используя тригонометрическое тождество

$$\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t,$$

после простых преобразований получим

$$f(t) = \alpha_m \omega_0^2 \left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1 - \frac{\alpha_m^2}{8} \right) \sin \omega t + \frac{\omega_0^2 \alpha_m^3}{24} \sin 3\omega t.$$

Нужно выбрать такое значение частоты ω , чтобы отклонение $f(t)$ от нуля было минимальным. Это достигается при

$$\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1 - \frac{\alpha_m^2}{8} \right) = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - (\alpha_m^2/8)}}.$$

Воспользовавшись разложением в ряд ($1/\sqrt{1-x} = 1 + (1/2)x + (1 \cdot 3/2 \cdot 4)x^2 + \dots$ при $x^2 < 1$), получим

$$\frac{T}{T_0} \approx 1 + \frac{\alpha_m^2}{16}. \quad (10)$$

Эта приближенная формула описывает зависимость периода колебаний любого физического маятника от его угловой амплитуды. Соответствующий график изображен на рис.5 штриховой линией. Видно, что при $\alpha_m < \pi/2$ из (10) получаются значения периода, очень близкие к результатам точного расчета.

Мы проанализировали движение физического маятника, основываясь на рассмотрении уравнения (4). Это уравнение в отличие от (5) является нелинейным, а такие уравнения часто "скрывают" в себе несколько качественно различных решений.

Очевидно, что характер движения физического маятника кардинально меняется при некотором значении начальной скорости, соответствующей переходу от колебательного движения маятника к его неравномерному вращению в одном направлении. Из закона сохранения энергии легко получить условие такого перехода: энергия маятника E , определяемая начальными условиями, должна превысить пороговое значение $E_{II} = 2mgl$. Можно показать, что дифференциальное уравнение (4) описывает и такое вращательное движение маятника (здесь уместно вспомнить слова академика Л. И. Мандельштама о том, что "именно физика учит нас, как допрашивать дифферен-

циальные уравнения"). Соответствующее решение при $E > E_{II}$ можно получить численно. Общие результаты решения для случаев $E > E_{II}$ и $E < E_{II}$, представленные, например, в виде графиков $\alpha(t)$ и $T(E)$, дадут нам картину движения маятника при произвольных начальных условиях.

Анализ полученных результатов приведет нас к понятиям фазового портрета, особых точек, сепаратрис и бифуркаций. А если принять во внимание силы трения, а также силы внешнего периодического воздействия, то соответствующее нелинейное дифференциальное уравнение откроет нам сложный и разнообразный мир нелинейных колебаний с бистабильностью, гистерезисом, динамическим хаосом и другими интереснейшими явлениями и понятиями современной физики. И все это доступно вам, старшеклассникам и студентам, которые в отличие от Галилея, Гюйгенса и Ньютона располагают могучим помощником - компьютером.

[К сожалению, эта статья в журнале опубликована в несколько сокращенном виде.](#)