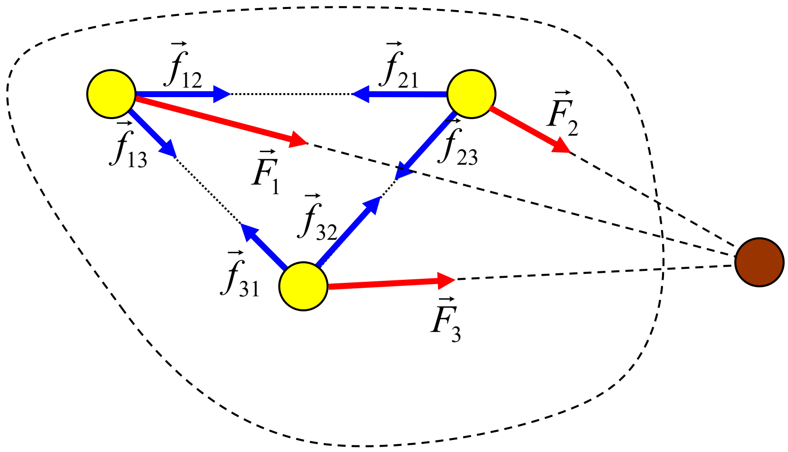
Закон сохранения импульса

Определения

1) Система материальных точек. Внутренние и внешние силы. Пусть система состоит из N материальных точек. Силы, действующие на j-ю точку, подразделяются на внутренние $\vec{f}_{jk}$ и внешние $\vec{F}_j$ (см. рис.).

Внутренние силы $\vec{f}_{jk}$ – силы, действующие на j-ю точку со стороны остальных точек, входящих в систему.

Внешняя сила $\vec{F}_j$ - равнодействующая сил, которые действуют j-ю точку со стороны тел, которые в систему не входят.



В соответствии с третьим законом Ньютона сумма всех внутренних сил равна нулю, поэтому сумма всех сил, действующих на точки системы, равна сумме внешних сил.

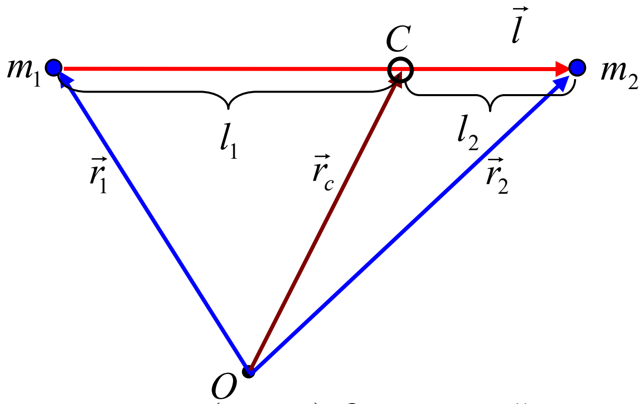
Если тела системы не взаимодействуют с внешними телами, то систему называют замкнутой (или изолированной).

2) Центр масс. Центром масс (центром инерции) системы материальных точек $m_1, m_2, \ldots m_N$ называют геометрическую точку, положение которой определяется радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + \ldots + m_N} \quad (1)$$

Если масса распределена непрерывно (в пространстве, по плоскости или вдоль линии), то составляющие систему материальные точки получаются при мысленном разделении объема тела на маленькие области. Тело с постоянной плотностью называют однородным.

Пример 1. Найдем центр масс системы из двух материальных точек массами m_1 и m_2.



Решение. Выбираем произвольную точку (начало) O, из которой проводим векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ к материальным точкам m_1 и m_2. Проведем также вектор $\vec{l}$ от m_1 к m_2. Тогда

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{l}$$

и

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2(\vec{r}_1 + \vec{l})}{m_1 + m_2} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{l}\ .$$

Следовательно, центр масс лежит на отрезке, соединяющем материальные точки на расстоянии $l_1 = m_2 l/(m_1 + m_2)$ от точки массы m_1 и на расстоянии $l_2 = m_1 l/(m_1 + m_2)$ от другой точки. При этом $m_1 l_1 = m_2 l_2$.

3) Система центра масс – система отсчета, связанная с центром масс и движущаяся поступательно.

4) Импульс системы материальных точек. Импульс системы определяется как сумма импульсов составляющих его частиц:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_j \tag{2}$$

Теоремы и законы

Теорема об изменении импульса системы материальных точек.

Продифференцировав уравнение (2) по времени, получим

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \dots.$$

По второму закону Ньютона

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \dots + \vec{F}_1,$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \dots + \vec{F}_2.$$

Из третьего закона Ньютона следует, что сумма всех внутренних сил равна нулю. Поэтому

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_j\ . \tag{3}$$

Итак, скорость изменения импульса системы равна результирующей внешней силе.

Закон сохранения импульса.

Из уравнения (3) следует, что импульс замкнутой системы сохраняется:

$$\vec{P} = const \quad \text{при} \sum \vec{F}_j = 0$$

Область действия этого закона выходит за пределы ньютоновской механики, в рамках которой мы его вывели. В курсе теоретической физики доказывается, что этот закон является следствием однородности пространства (равноправия всех его точек) и поэтому носит универсальный характер. Даже при учете конечной скорости распространения сигнала (явление запаздывания), которое приводит к нарушению третьего закона Ньютона, закон сохранения импульса выполняется точно, если учесть импульс силового поля.

Импульс незамкнутой системы сохраняется в следующих случаях:

1. Если сумма внешних сил равна нулю.

2. Если результирующая внешняя сила перпендикулярна некоторому направлению, то сохраняется не вектор импульса системы, а проекция импульса системы на это направление.

3. Если взаимодействие продолжается очень короткое время Δt так, что выполняется неравенство $\left|\left\langle \vec{F} \right\rangle \Delta t\right| << \left|\vec{P}\right|$)

Теорема о движении центра масс.

Продифференцировав уравнение (1) по времени, найдем, что импульс системы выражается через скорость центра масс $\vec{V}_c = d\vec{r}_c / dt$:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \ldots + m_N \frac{d\vec{r}_N}{dt}}{m_1 + \ldots + m_N} = \frac{\vec{P}}{m} \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{P} = m\vec{V}_c \,, \tag{4}$$

где m — масса системы. Следовательно, в системе центра масс импульс системы точек равен нулю.

Продифференцировав по времени уравнение (4), с учетом (3) получим уравнение движения центра масс:

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_j \;, \tag{5}$$

где $\vec{a}_c = d\vec{V}_c dt$ - ускорение центра масс. Уравнение (4) выражает теорему о движении центра масс:

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила — векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Демонстрации

1. Отдача при выстреле. Снаряд свободен.
   http://www.youtube.com/watch?v=S4JZiWGNQ6k

2. Отдача при выстреле. Снаряд привязан.
   http://www.youtube.com/watch?v=ia18QR65MKo

3. Скатывание тележки с подвижной наклонной плоскости. http://www.youtube.com/watch?v=XUMOOyuYtdQ

4. Движение центра масс – компьютерная симуляция.

5. Движение центра масс http://www.youtube.com/watch?v=FPLaf_I4rJs МГУ

Натурный эксперимент

Реактивное движение. Изменение скорости корабля в глубоком космосе (вдали от гравитирующих тел) возможно только за счет выбрасывания наружу части массы — ракетного топлива. Уравнение движения космолета при наличии внешней силы $\vec{F}$ и реактивной струи легко получить, записав закон изменения импульса (3) в инерциальной системе отсчета, связанной в данный момент с кораблем:

$$m\Delta\vec{\upsilon} + \Delta M\vec{u} = \vec{F}\Delta t,$$

где $\vec{u}$ — скорость струи относительно корабля, а ΔM - масса выброшенного за время Δt топлива. Разделив на Δt, получим уравнение Мещерского:

$$m\vec{a} = \vec{F} - \mu\vec{u},$$

где $\mu = \Delta M / \Delta t = -\Delta m / \Delta t$ — расход топлива в струе. Второй член в правой части называют реактивной силой.

Запишем уравнение Мещерского для движения по прямой в отсутствие внешней силы:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -u\frac{dm}{dt}$$

Считая u постоянной и обозначив начальную массу корабля m_0, найдем зависимость скорости корабля от его массы:

$$\frac{\upsilon}{u} = -\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$$

(уравнение Циолковского).

Допустим, например, что ракете надо сообщить первую космическую скорость, т. е. такую скорость, чтобы она начала двигаться вокруг Земли по окружности. Эта скорость приблизительно равна υ = 8 км/с. При скорости газовой струи $u =$ 1 км/с должно быть m_0 / m=2980. Практически вся масса ракеты приходится на топливо. При $u =$ 4 км/с получилось бы m_0 / m = 7,39 . Отсюда видно, что относительная полезная масса ракеты очень быстро увеличивается с увеличением скорости газовой струи u.

Газы, выходящие из ракеты, должны иметь возможно меньший молекулярный вес и быть нагреты до возможно более высокой температуры. Действительно, в молекулярной физике будет показано, что скорость газовой струи u пропорциональна $\sqrt{T/\mu}$, где T — абсолютная температура газа, а μ — его молярная масса.

В современных ракетах на химическом топливе скорость газовой струи порядка одного или нескольких километров в секунду. Вероятно, она не превосходит 4 км/с. Имея это в виду, оценим перспективы межпланетных и межзвездных полетов ракет на химическом топливе.

Минимальная скорость, которую необходимо сообщить ракете относительно Земли, чтобы она вышла за пределы действия поля земного тяготения, называется второй космической скоростью и составляет 11,2 км/с. Практически такую скорость необходимо сообщить ракете, например, при отправке ее на Луну. Скорость ракеты, которую она должна приобрести относительно Земли, чтобы навсегда покинуть пределы Солнечной системы, называется третьей космической скоростью. Третья космическая скорость зависит от направления начальной скорости ракеты. Минимальное ее значение соответствует запуску ракеты по касательной к земной орбите в направлении орбитального вращения Земли. Эта скорость составляет около 16,7 км/с.

Скорости такого порядка необходимы при межпланетных путешествиях. Допустим, что $u = 4$ км/с. Тогда для достижения второй космической скорости отношение m_0 / m должно составлять $m_0 / m = 17$, а для достижения третьей $m_0 / m = 64$. Оба отношения не очень велики. Однако надо принять во внимание, что ракета должна иметь запас топлива для обратного возвращения на Землю, а также для ее торможения при посадке и для коррекции траектории. Поэтому отношение m_0 / m (m — масса ракеты, вернувшейся обратно на Землю) должно быть значительно больше. Допустим, например, что поле тяготения и размеры второй планеты такие же, как у Земли. Тогда при путешествии в прямом направлении в нашем примере должно быть $m_0 / m' = 60$ (m'- масса ракеты, достигшей второй планеты). При обратном путешествии $m' / m = 60$, так что $m_0 / m = 3600$.

Таким образом, для осуществления межпланетных полетов запас топлива должен превышать массу космического корабля по меньшей мере в несколько тысяч раз. Технические трудности очень велики, но, по-видимому, все еще преодолимы.

Но для межзвездных полетов ракеты на химическом топливе абсолютно непригодны. Возьмем, например, $u = 10$ км/с, что для ракет на химическом топливе, по-видимому, завышает пределы возможного. (Если допустить, что газовая струя состоит из наиболее легкого вещества — атомарного водорода, то для достижения таких скоростей потребуются температуры порядка 5000 °С). Расстояния до звезд измеряются световыми годами — от ближайшей звезды свет идет до Земли около 4 лет. Поэтому для достижения даже ближайших звезд нужны космические корабли, скорости которых близки к скорости света с.

Допустим, что скорость космического корабля v должна составлять четверть скорости света ($\upsilon / c = 0{,}25$). Тогда должно быть $m_0 / m \approx 5 \cdot 10^{3827}$. На каждую тонну полезного груза должно приходиться $5 \cdot 10^{3827}$ тонн топлива! Если полезная масса 20 т , то стартовая масса корабля должна быть $m_0 \approx 10^{3335}$ г! Масса нашей галактики 10^{44} г.

Наш пример доказывает, что для межзвездных полетов ракеты на химическом топливе абсолютно непригодны.