

## Компьютерное моделирование электростатических полей

**Цель работы:** исследование при помощи компьютерного моделирования электростатического поля, созданного а) двумя точечными зарядами, б) заряженным проводящим эллипсоидом, в) точечным зарядом и проводящей заряженной сферой.

**Приборы и оборудование:** компьютер с установленной программой моделирования электростатических полей.

### Теоретическая часть

#### *Общая задача электростатики*

Вектор напряженности электрического поля неподвижного точечного заряда вычисляется по формуле

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\vec{r}}{r^3}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_0$  - электрическая постоянная;  $\vec{r}$  - вектор, проведенный от точечного заряда  $Q$  в точку, в которой определяется  $\vec{E}$ . Из (1) следует, что

$$E = |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2},$$

а направление  $\vec{E}$  совпадает с направлением  $\vec{r}$  при  $Q > 0$  и противоположно направлению  $\vec{r}$  при  $Q < 0$ .

Используя принцип суперпозиции, нетрудно вычислить напряженность поля, созданного несколькими точечными зарядами. Если заряды распределены в пространстве непрерывно *по известному закону*, то для

вычисления поля необходимо провести суммирование бесконечно малых величин - векторов напряженности, которые создаются бесконечно малыми порциями заряда. Математически эта задача сводится к интегрированию.

Однако реальные задачи, которые приходится решать в электростатике, гораздо сложнее. Дело в том, что распределение заряда в объеме и на поверхности тел не бывает известным заранее, а само подлежит определению.

Пусть, например, требуется найти напряженность поля уединенного проводника произвольной формы, заряд которого  $Q$ . Воспользоваться формулой (1) и принципом суперпозиции для расчета электрического поля напрямую не удастся, поскольку неизвестна поверхностная плотность заряда в различных точках поверхности проводника. Заряд по поверхности распределен неравномерно и только в простейшем случае, когда проводник является шаром, поверхностная плотность заряда одинакова во всех точках поверхности. Если же, например, проводник имеет форму стержня, то большая часть заряда сосредоточена вблизи его концов.

Еще более сложной становится задача расчета полей при наличии диэлектриков. В электрическом поле происходит поляризация диэлектриков и наряду со сторонними зарядами необходимо учитывать и связанные (поляризационные) заряды. В данной работе мы *не будем изучать* явления, связанные с поляризацией диэлектриков, и сформулируем задачу электростатики в вакууме следующим образом.

*Заданы расположение в пространстве (в вакууме) и форма одного или нескольких проводящих тел. Кроме того, известны заряды или потенциалы этих проводников. Требуется определить напряженность электрического поля во всех точках пространства и распределение заряда по поверхности проводников.*

Общий подход к решению этой задачи состоит в следующем. Из теоремы Гаусса и условия потенциальности электростатического поля выводится (см. Приложение к работе) дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

называемое уравнением Лапласа, которое при определенных граничных условиях на поверхности проводников позволяет в принципе рассчитать

потенциал  $\varphi(x, y, z)$  в любой точке поля. Если потенциал  $\varphi(x, y, z)$  найден, то вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$  можно определить по формулам

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (3a)$$

которые принято объединять одной векторной записью

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \quad (3б)$$

( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - орты осей прямоугольной системы координат  $XYZ$ ).

Лишь в некоторых случаях удастся выразить  $\varphi(x, y, z)$  через элементарные функции, а чаще всего для решения уравнения Лапласа приходится привлекать численные методы и компьютерные расчеты. *Мы научимся анализировать основные особенности электрического поля по результатам таких расчетов  $\varphi(x, y, z)$ , вычислять вектор напряженности электрического поля в различных точках пространства и плотность поверхностного заряда на проводниках.*

Еще раз заметим, что уравнения (2), (3) выводятся из теоремы Гаусса и условия потенциальности электростатического поля. Таким образом, значение теоремы Гаусса не ограничивается возможностью решения с ее помощью нескольких частных задач электростатики. И роль потенциала не сводится только к возможности простого расчета с его помощью работы сил поля. *Теорема Гаусса и условие потенциальности электростатического поля приводят к дифференциальному уравнению, на основе которого решаются любые задачи электростатики.*

### ***Потенциал электростатического поля***

В отличие от вектора напряженности электрического поля потенциал является скалярной величиной. Зная значения потенциала в окрестности некоторой точки, можно по формулам (3) вычислить напряженность поля в этой точке.

Пусть, например, потенциал электрического поля зависит от координат  $x$  и  $y$  по закону  $\varphi = a(x^2 - y^2)$ , где  $a$  - постоянная. Тогда

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2ax, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2ay,$$

$$\vec{E} = 2a(-x\vec{i} + y\vec{j}), \quad E = 2a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Если аналитическая зависимость потенциала от координат неизвестна, а определены значения потенциала лишь в конечном числе точек, находящихся в близко расположенных узлах прямоугольной сетки, то проекции вектора напряженности на координатные оси можно рассчитать по формулам

$$E_x \approx -\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2a}, \quad E_y \approx -\frac{\varphi_2 - \varphi_4}{2b}$$

(см. рис.4 к лабораторной работе № 1 и сопровождающий этот рисунок текст). Подобная замена производной отношением малых приращений функции и аргумента широко используется в численных методах и в экспериментальной технике.

Электростатические поля удобно изображать при помощи эквипотенциальных поверхностей - поверхностей равного потенциала. Возьмем на эквипотенциальной поверхности произвольную точку  $O$  и введем локальную систему координат с началом в этой точке (рис.1). Ось  $Z$  направим перпендикулярно эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциала  $\varphi$ . Это направление примем за положительное направление единичного вектора нормали  $\vec{n}$ . Координатная плоскость  $XY$ , очевидно, совместится с касательной плоскостью к эквипотенциальной поверхности. Тогда в точке  $O$   $\partial\varphi/\partial x = \partial\varphi/\partial y = 0$ . Кроме того, орт оси  $Z$   $\vec{k} = \vec{n}$ ,  $\partial\varphi/\partial z = \partial\varphi/\partial n$ . Формула (3) переходит в формулу

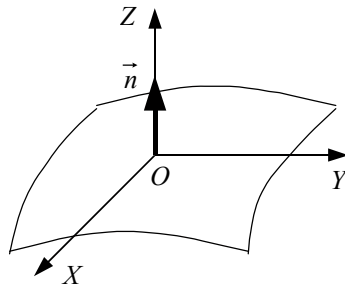


Рис.1. Локальная система координат

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\vec{n} \frac{\partial\varphi}{\partial n}. \quad (4)$$

Функция  $\varphi$  возрастает наиболее быстро в направлении нормали  $\vec{n}$ . Поэтому, согласно (4), вектор напряженности электрического поля в каждой точке пространства перпендикулярен эквипотенциальной поверхности и направлен в сторону максимального убывания потенциала. Модуль вектора напряженности равен модулю производной функции  $\varphi$  в том же направлении.

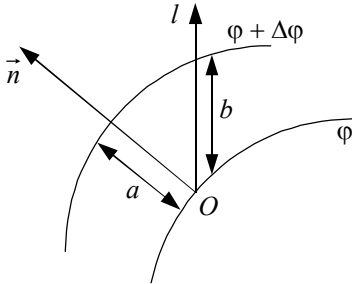


Рис.2. Эквипотенциальные поверхности

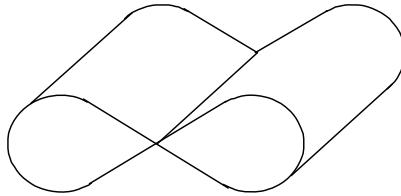


Рис.3. Эквипотенциальная поверхность, самопересекающаяся в точках, где  $\vec{E} = 0$

Поясним сказанное на примере. На рис.2 изображены две эквипотенциальные поверхности, соответствующие двум близким значениям потенциала  $\varphi$  и  $\varphi + \Delta\varphi$ .  $\vec{n}$  - вектор нормали, направленный в сторону увеличения потенциала. Видно, что производная по направлению  $\vec{n}$   $\partial\varphi/\partial n \approx \Delta\varphi/a$  больше, чем производная по любому другому направлению  $\partial\varphi/\partial l \approx \Delta\varphi/b$ . Вектор напряженности направлен в сторону, противоположную  $\vec{n}$ , и его модуль  $|\vec{E}| \approx \Delta\varphi/a$ .

Очевидно, что эквипотенциальная поверхность не может самопересекаться, поскольку в точках пересечения можно было бы провести две касательные плоскости и определить два различных направления вектора напряженности (рис.3). Исключение составляют особые точки, где  $\vec{E} = 0$ .

## Компьютерное моделирование

Существуют различные методы решения дифференциальных уравнений. В некоторых частных случаях решение удается получить аналитически (выразить через элементарные функции), но чаще всего приходится использовать численные методы и компьютерные расчеты.

Будем исходить из того, что уже разработана компьютерная программа, которая с высокой точностью находит решение уравнения Лапласа  $\varphi(x, y, z)$ , удовлетворяющее заданным граничным условиям на поверхности тел, входящих в систему. Такое решение будет совпадать с экспериментом, если все проводники являются однородными, неподвижными и в поле отсутствуют диэлектрики. Поэтому к результатам таких компьютерных расчетов можно относиться как к "компьютерному эксперименту", моделирующему эксперимент реальный. Наша задача состоит в выполнении "компьютерного эксперимента" и анализе полученных результатов.

Работа с компьютерными программами обычно включает два этапа. Сначала необходимо убедиться в правильности работы программы. Для этого программу "испытывают" на частных задачах и в специальных случаях, когда решение точно (или приближенно) известно. "Компьютерный эксперимент" должен подтверждать известные закономерности, а также показывать отклонение от теоретических результатов, полученных в рамках некоторых предположений, нарушающихся в "компьютерном эксперименте".

Например, потенциал и модуль вектора напряженности электрического поля, созданного *точечным* диполем в точке, положение которой задано радиус-вектором  $\vec{r}$  (рис.4), определяются формулами

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (5)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}, \quad (6)$$

где  $\vec{p} = Q\vec{L}$  - электрический момент диполя (дипольный момент);  $\vec{L}$  - вектор, проведенный от *отрицательного* заряда к положительному;

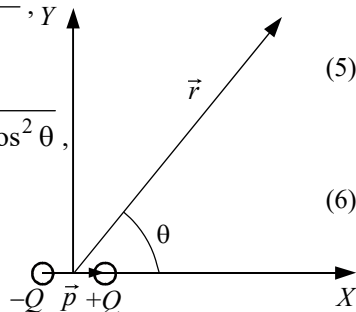


Рис.4. Электрический диполь

$\theta$  - угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ . Формулы (5), (6) получены для точечного диполя, когда длина  $L$  пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием от диполя до точки наблюдения ( $L \ll r$ ). Поэтому при нарушении условия  $L \ll r$  должны наблюдаться отклонения расчетов по формулам (5), (6) от результатов "компьютерного эксперимента", причем эти отклонения должны уменьшаться с увеличением  $r/l$ .

После "испытания" компьютерной программы можно приступить к поиску новых закономерностей. Вам будет предложено исследовать распределение заряда по поверхности заряженного проводящего эллипсоида, а также по поверхности проводящей сферы, расположенной в поле точечного заряда. Эти задачи являются для вас новыми в том смысле, что их не удастся решить, напрямую воспользовавшись формулой (1) и принципом суперпозиции.

Для "экспериментального" определения плотности поверхностного заряда следует воспользоваться результатом, вытекающим из теоремы Гаусса: во внешнем пространстве вблизи поверхности проводника поле  $\vec{E}$  перпендикулярно поверхности проводника и определяется формулой

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}, \quad (7)$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор нормали, проведенный наружу от поверхности проводника;  $\sigma$  - поверхностная плотность заряда в данной точке.

### ***Как пользоваться компьютерной программой***

1. Компьютерная программа запускается инженером.
2. Зонд (курсор) для измерения потенциала можно перемещать при помощи мыши или клавишами со стрелками (второй способ удобнее и точнее). На экране отображаются координаты зонда и значение потенциала в данной точке.
3. Для измерения разности потенциалов между двумя близко расположенными точками в программе предусмотрен "двойной зонд". Чтобы активизировать двойной зонд, нажмите на левую кнопку мыши и удерживайте ее в нажатом состоянии. На экране появится горизонтальный отрезок линии - визир. При перемещении курсора один конец визира будет оставаться неподвижным (точка  $A$  на рис.5), а другой будет перемещаться по дуге окружности, отслеживая направление на курсор. При этом измеряется и отображается на экране разность потенциалов

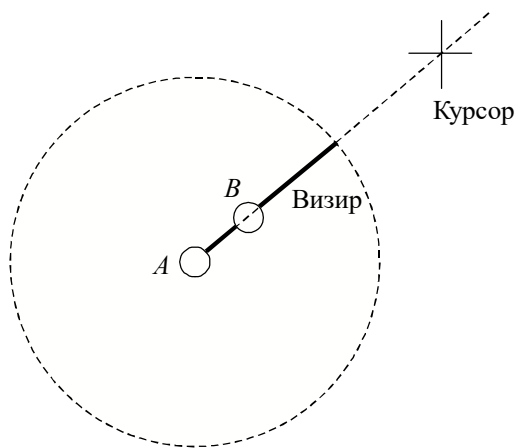


Рис.5. Измерение двойным зондом разности потенциалов между двумя близко расположенными точками  $A$  и  $B$

$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$  между двумя близко расположенными точками  $B$  и  $A$ , расстояние между которыми  $AB = d = 1$  мм. Таким образом, двойной зонд позволяет определить производную  $\partial\varphi/\partial l \approx \Delta\varphi/d$  в заданном направлении.

4. Можно активизировать двойной зонд и при помощи клавиатуры. Для этого необходимо удерживать в нажатом состоянии клавишу "Shift", а курсор перемещать при помощи клавиш со стрелками. Такой режим позволяет более точно поворачивать двойной зонд вокруг выбранной точки и мы *именно его* рекомендуем для работы.

5. Чтобы провести линию постоянного потенциала через заданную точку, установите в выбранной точке курсор и нажмите клавишу "Ctrl".

6. Распечатка результатов производится инженером.

## Выполнение работы

**Упражнение 1.** Напряженность и потенциал электрического поля диполя.



1. Точечные заряды  $Q_2 = -Q$  и  $Q_1 = Q$  расположены в точках с координатами  $(-L/2, 0)$  и  $(L/2, 0)$ . Выберите параметры из табл.1 в соответствии с номером вашей бригады. Рассчитайте по формулам (5), (6) потенциал и модуль вектора напряженности электрического поля в точке с координатами  $(x_1, y_1)$ .

**Таблица 1**

Номер бригады		$Q$ , пКл (1 пКл = $10^{-12}$ Кл)	$L$ , мм	$x_1$ , мм	$y_1$ , мм
Комната А	Комната В				
1, 12	6, 12	10	20	10	60
2, 11	5, 11	10	40	40	80
3, 10	4, 10	20	20	-20	60
4, 9	3, 9	20	40	-20	80
5, 8	2, 8	40	20	20	70
6, 7	1, 7	40	40	30	70

2. Определите в точке  $(x_1, y_1)$  при помощи зонда (см. раздел "Как пользоваться компьютерной программой") величины  $\varphi$ ,  $E_x$ ,  $E_y$ .

Для определения  $E_x$  сначала измерьте потенциал в точках  $(x_1 - d/2, y_1)$  и  $(x_1 + d/2, y_1)$ , где  $d = 20$  мм, затем рассчитайте  $E_x$  по формуле

$$E_x \approx -\frac{\varphi(x_1 + d/2, y_1) - \varphi(x_1 - d/2, y_1)}{d}.$$

Аналогичным способом определите  $E_y$ :

$$E_y \approx -\frac{\varphi(x_1, y_1 + d/2) - \varphi(x_1, y_1 - d/2)}{d}.$$

Рассчитайте  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ . Сравните полученные результаты для потенциала  $\varphi(x_1, y_1)$  и модуля напряженности  $E(x_1, y_1)$  с расчетами по формулам (5), (6).

3. Определите модуль вектора напряженности в точке  $(x_1, y_1)$  при помощи двойного зонда.
4. Результаты измерений и расчетов сведите в форму табл.2.

**Форма табл.2**

$\Phi_{\text{диполь}},$ В	$\Phi_{\text{эксп}},$ В	$E_{\text{диполь}},$ В/м	$E_{\text{эксп}},$ В/м	$E_x,$ В/м	$E_y,$ В/м	$\sqrt{E_x^2 + E_y^2},$ В/м
Формула (5)	Зонд	Формула (6)	Двойной зонд, $d = 1$ мм	Измерения при $d = 20$ мм		

В чем причина различий между  $\Phi_{\text{диполь}}$  и  $\Phi_{\text{эксп}}$ ? Какое значение является более точным? В чем причина различий между  $E_{\text{диполь}}, E_{\text{эксп}}$  и  $\sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ ? Какое значение является более точным? Ответы на эти вопросы *сформулируйте в виде выводов по данному упражнению.*

5. Постройте с равным шагом (по потенциалу) семейство эквипотенциальных поверхностей. Картины распечатайте (или зарисуйте в тетрадь). Проведите несколько силовых линий.

**Упражнение 2.** Электрическое поле двух точечных зарядов произвольной величины, расположенных на расстоянии  $L$  друг от друга.

1. Постройте семейство эквипотенциальных поверхностей поля системы зарядов  $Q_1 = Q$  и  $Q_2 = 2Q$ . Докажите, что в дальней зоне электрическое поле слабо отличается от поля точечного заряда. Для этого можно измерить и рассчитать по формуле  $\varphi = 3Q / 4\pi\epsilon_0 r$  потенциал в достаточно удаленной точке.

2. Расстояние между зарядами  $Q_1 = Q$  и  $Q_2 = 2Q$  установите равным  $L = 80$  мм или  $L = 120$  мм. "Экспериментально" найдите потенциал точки, в которой происходит объединение двух эквипотенциальных поверхностей в одну, охватывающую оба точечных заряда. Приняв

во внимание, что в такой особой точке напряженность электрического поля должна быть равна нулю, из уравнений

$$\frac{Q_1}{\left(\frac{L}{2}-x\right)^2} = \frac{Q_2}{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{\frac{L}{2}-x} + \frac{Q_2}{\frac{L}{2}+x} \right)$$

рассчитайте потенциал "критической" эквипотенциальной поверхности, проходящей через особую точку. Сравните рассчитанное значение  $\varphi$  с "экспериментальным". Картины эквипотенциальных поверхностей распечатайте или зарисуйте.

3. (Выполняется по согласованию с преподавателем.) Повторите п. 2 для системы зарядов  $Q_1 = Q$ ,  $Q_2 = -2Q$  (формулы для расчета  $\varphi$  получите сами). Расстояние между зарядами  $L$  примите равным 10, 20 или 40 мм.

**Упражнение 3.** Электрическое поле заряженного проводящего эллипсоида вращения ( $OX$  - ось симметрии эллипсоида вращения,  $a$  и  $b$  - большая и малая полуоси; их значения выбираются по указанию преподавателя).

1. Убедитесь, что заряд распределен по поверхности неравномерно. Для этого определите максимальную  $\sigma_{\max}$  и минимальную  $\sigma_{\min}$  плотности поверхностного заряда на эллипсоиде. Используйте двойной зонд и формулу (7). Обратите внимание на то, что поверхностная плотность заряда максимальна у "острых" концов эллипсоида, обладающих максимальной кривизной поверхности, и минимальна у "тупых" концов. При проведении "эксперимента" будьте внимательны: двойной зонд должен располагаться вблизи поверхности проводника, но не попадать внутрь проводника.

2. Подтвердите измерениями вывод теории: если заряд проводника увеличить в  $n$  раз, то поверхностная плотность заряда в любой точке его поверхности также увеличится в  $n$  раз. Эксперимент проведите для двух точек поверхности (например, обладающих максимальной и минимальной кривизной).

3. Закон распределения заряда по поверхности зависит от формы проводника. Убедитесь в этом, проведя измерения  $\sigma_{\min}$  и  $\sigma_{\max}$  для эллипсоидов с различным отношением полуосей  $a/b$ . Постройте график зависимости  $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$  от  $a/b$ .

4. Сформулируйте выводы.

**Упражнение 4.** (*дополнительное*). Точечный заряд вблизи нейтральной проводящей сферы.

1. Постройте семейство эквипотенциальных поверхностей.
2. Определите максимальную плотность поверхностного заряда на сфере.
3. Определите координаты точек на поверхности сферы, в которых происходит смена знака поверхностного заряда.

### Подготовка к работе

1. Физические понятия, величины, законы, соотношения, знание которых необходимо для успешного выполнения работы:

- электрический заряд и его фундаментальные свойства;
  - плотность заряда (линейная, поверхностная, объемная);
  - закон Кулона;
  - пробный заряд; вектор напряженности электрического поля;
  - разность потенциалов; потенциал;
  - принцип суперпозиции электрических полей;
  - связь напряженности поля и потенциала;
  - электрическое поле точечного заряда;
  - электрический диполь; точечный диполь; напряженность и потенциал поля диполя;
  - теорема Гаусса;
  - проводники в электрическом поле;
  - силовая линия; эквипотенциальная поверхность.
2. Приведите в рабочей тетради вывод формул (3), (5) - (7).
  3. Докажите утверждения:
    - 1) силовые линии перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям;
    - 2) вектор напряженности направлен в сторону максимального убывания потенциала;
    - 3) электрическое поле в проводнике равно нулю;
    - 4) потенциал во всех точках однородного проводника одинаков.

**Расчетное задание.**

Выполните расчеты, соответствующие п. 1 упражнения 1 и п. 2 упражнения 2.

### Литература

1. **Иродов И.Е.** Электромагнетизм. Основные законы. - М.-СПб.: Физматлит, 2001. - §§ 1.1 - 1.7; 2.1; 2.2; 2.5.
2. **Савельев И.В.** Курс общей физики. Электричество и магнетизм. - М.: Астрель, 2001. - §§ 1.1 - 1.14; 3.1; 3.2.

### Приложение к лабораторной работе № 2

Из формулы (1) и принципа суперпозиции в электростатике доказывается теорема Гаусса, из которой следует, что для произвольной замкнутой поверхности  $S$ , внутри которой отсутствуют заряды,

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = 0. \quad (\text{П1})$$

Из формулы (1) и принципа суперпозиции вытекает также условие потенциальности электростатического поля

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (\text{П2})$$

где  $L$  - произвольный замкнутый контур. Уравнения (П1), (П2) могут быть записаны в дифференциальном виде:

$$\text{div} \vec{E} = 0, \quad (\text{П3})$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0, \quad (\text{П4})$$

где введены общепринятые обозначения (дивергенция и ротор вектора)

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

$$\text{rot} \vec{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - орты осей прямоугольной системы координат  $XYZ$ ).

Решение уравнения (П4) можно записать через потенциал  $\varphi$ :

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\left(\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \quad (\text{П5})$$

(поскольку для произвольной функции  $\varphi(x, y, z)$  имеет место равенство  $\text{rot}(\text{grad}\varphi) = 0$ , то уравнение (П4) выполняется автоматически).

Подставляя (П5) в (П3) и учитывая, что

$$\text{div}(\text{grad}\varphi) = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

получаем уравнение Лапласа.