

Лабораторная работа № 5

Свободные колебания в колебательном контуре

Цель работы: изучение затухающих колебаний в колебательном контуре при различных значениях емкости, индуктивности, активного сопротивления.

Приборы и оборудование: катушка с обмоткой возбуждения и электронным ключом, набор конденсаторов, магазин сопротивлений, генератор прямоугольных импульсов, осциллограф.

Продолжительность работы: 4 часа.

Теоретическая часть

На рис.1 изображена цепь, называемая последовательным колебательным контуром (C - емкость конденсатора; L - индуктивность катушки; R - суммарное активное сопротивление контура).

В этой цепи могут возникать электрические колебания - циклические изменения тока i в контуре и падений напряжения на элементах цепи. При $R = 0$ эти колебания являются гармоническими и запасенная в контуре энергия

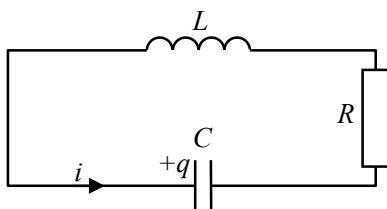


Рис.1. Последовательный колебательный контур

$$W = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} \quad (1)$$

остаётся постоянной (u - напряжение на конденсаторе). В процессе колебаний происходит лишь перераспределение этой энергии между электрическим полем конденсатора и магнитным полем катушки индуктивности.

Если же сопротивление контура R отлично от нуля, то запасенная в контуре энергия W уменьшается во времени вследствие выделения тепла на сопротивлении R :

$$\frac{dW}{dt} = -i^2 R. \quad (2)$$

Одно из направлений тока примем за положительное (оно показано на рис.1 стрелкой). Обозначим через q заряд той обкладки конденсатора, направление от которой к другой обкладке совпадает с положительным направлением тока. Из определений силы тока и емкости следует

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad u = \frac{q}{C}. \quad (3)$$

После несложных преобразований из формул (1) - (3) получим следующее уравнение относительно неизвестной функции времени $u = u(t)$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (4)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \beta = \frac{R}{2L}. \quad (5)$$

При $\omega_0^2 > \beta^2$ уравнение (4) имеет решение

$$u = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (6)$$

описывающее затухающие колебания напряжения (рис.2,а). Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (7)$$

зависит от параметров контура (L , C и R), а постоянные U_0 и α определяются начальными условиями: значениями напряжения u и тока i при $t = 0$. Множитель

$$U_m = U_0 e^{-\beta t} \quad (8)$$

перед периодической функцией в формуле (6) называется амплитудой затухающих колебаний. Она экспоненциально убывает во времени,

причем время, за которое амплитуда уменьшается в e раз, равно $1/\beta$. Величина β , таким образом, характеризует скорость затухания амплитуды колебаний и называется коэффициентом затухания.

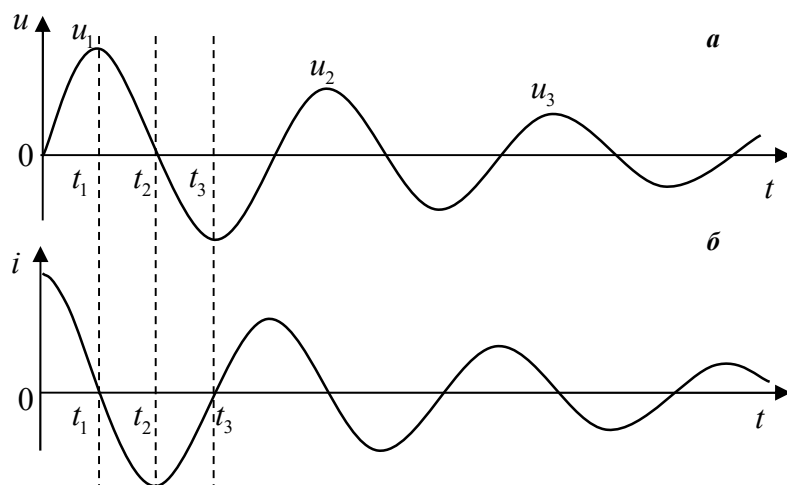


Рис.2. Затухающие колебания напряжения на конденсаторе (а) и тока (б) в колебательном контуре

За каждый период колебаний $T = 2\pi / \omega$ амплитуда U_m убывает в

$$\frac{U_m(t)}{U_m(t+T)} = e^{\beta T}$$

раз. Логарифм этого отношения

$$\lambda = \ln \frac{U_m(t)}{U_m(t+T)} = \beta T \quad (9)$$

называется логарифмическим декрементом затухания.

Затухание колебаний в контуре характеризуют также добротностью контура Q , которая определяет относительные потери энергии за один период колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}. \quad (10)$$

При малом затухании, когда

$$\beta^2 \ll \omega_0^2$$

и

$$T \approx 2\pi / \omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (11)$$

из формулы (10) после преобразований следует

$$Q \approx \pi / \lambda.$$

Зависимость тока i от времени также имеет вид затухающих колебаний, что вытекает из формул (3), (6). Причем в случае слабого затухания ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) колебания тока $i(t)$ опережают по фазе колебания напряжения $u(t)$ на $\pi/2$:

$$i = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \pi/2),$$

где $I_0 = \omega C U_0$. График $i(t)$ для этого случая приведен на рис.2,б.

При $\beta^2 \geq \omega_0^2$ вместо колебаний в контуре происходит аperiodический (непериодический) процесс установления стационарных значений тока $i = 0$ и напряжения $u = 0$. Условие прекращения колебаний $\beta^2 \geq \omega_0^2$ можно также записать в виде неравенства $R \geq R_{кр}$, где $R_{кр} = 2\sqrt{L/C}$ - так называемое критическое сопротивление контура.

Описание эксперимента

Электрическая схема установки изображена на рис.3. Колебательный контур образуют конденсатор C , катушка индуктивности L , магазин сопротивлений R_m и резистор R_T , соединенные последовательно.

Переключатели позволяют выбрать одно из двух значений индуктивности L (L_1 или L_2) и одно из двух значений емкости C (C_1 или C_2).

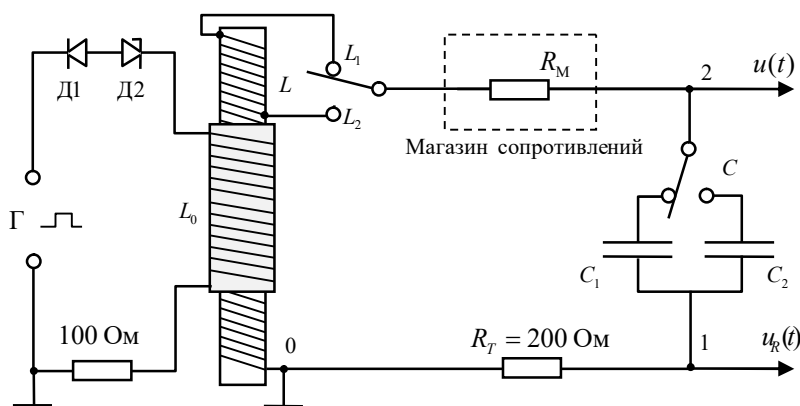


Рис.3. Электрическая схема установки

Напряжения $u_R(t)$ на участке цепи 0–1 и $u(t)$ на участке 0–1–2 подаются на двухлучевой осциллограф. На его экране можно одновременно наблюдать графики (осциллограммы) зависимостей этих напряжений от времени. Напряжение $u_R(t) = iR_T$ пропорционально току и позволяет его рассчитывать, а напряжение $u(t) = u_C(t) + u_R(t)$ с достаточной точностью равно напряжению на конденсаторе $u_C(t)$, поскольку в нашем эксперименте $u_R(t) \ll u_C(t)$.

Магазин сопротивлений позволяет проводить измерения при различных сопротивлениях колебательного контура R .

Для возбуждения колебаний в контуре служит катушка L_0 и цепь ее питания (см. рис.3). При протекании через L_0 тока i^* внутри этой катушки (и, следовательно, внутри катушки L) создается магнитное поле. Если ток i^* быстро выключить, то в силу закона электромагнитной индукции магнитный поток через катушку L скачкообразно измениться не может. Магнитное поле будет создаваться теперь током, который возбуждается в катушке L в момент выключения тока i^* . С этого момента

начнется колебательный процесс в $L - R_M - C - R_T$ - контуре. Начальная энергия колебаний равна энергии магнитного поля катушки L в момент выключения тока i^* .

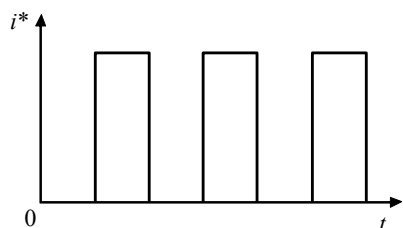


Рис.4. Зависимость тока в катушке L_0 от времени

Скачкообразное изменение тока i^* через катушку L_0 обеспечивается генератором прямоугольных импульсов Г, диодом Д1 и стабилитроном Д2 (технические подробности работы такого электронного ключа здесь не рассматриваются). Зависимость тока i^* от времени представлена на рис.4.

Эксперимент

Убедитесь, что схема установки соответствует рис.3. Включите осциллограф и генератор прямоугольных импульсов. На генераторе установите частоту (25...40) Гц. С помощью переключателя на панели генератора выберите режим прямоугольных импульсов, ручку регулировки выходного сигнала поверните по часовой стрелке почти в крайнее положение.

Запишите в табл.1 заданные в лабораторной работе параметры и марки используемых приборов.

Таблица 1

Параметры и приборы

Параметры: определяются инженером или преподавателем	Приборы:
L_1 (или L_2)	Генератор
$C = (... \pm ...) \text{ мкФ}$	Осциллограф ...

Упражнение 1. Наблюдение свободных колебаний.

Пронаблюдайте на экране осциллографа зависимость $u(t)$ при различных значениях емкости C , индуктивности L и сопротивления R_M . Убедитесь, что:

- период затухающих колебаний увеличивается с ростом емкости C и индуктивности L в соответствии с формулой (11);
- коэффициент затухания β при изменении емкости остается практически неизменным и уменьшается с ростом индуктивности L в соответствии с формулой (5).

Если эти закономерности не подтверждаются экспериментально, обратитесь к инженеру или преподавателю.

Упражнение 2. Измерение периода затухающих колебаний. Определение индуктивности катушки L .

При дальнейших измерениях значения C и L остаются постоянными, они должны быть выбраны по указанию преподавателя из имеющегося на стенде набора. Сопротивление магазина R_M установите равным нулю. Измерьте период колебаний T и с помощью формулы (11) рассчитайте значение индуктивности L (емкость конденсатора известна). Результаты измерений и расчетов представьте в рабочей тетради как показано в табл.2. В ее последней строке запишите расчетную формулу для индуктивности L , затем числовое выражение, полученное после подстановки в формулу численных значений, результат вычислений и размерность (п. 6 Приложения 2 на с. 105). Так же поступайте при вычислении других величин.

Таблица 2

К упражнению 2

Упражнение 2. Измерение периода затухающих колебаний. Определение индуктивности катушки L	
Период в делениях	...
Цена деления	...
Период	$T = \dots$ мс
Расчет индуктивности по результатам измерений: $L = \dots$ мГн	

Упражнение 3. Проверка закона сохранения энергии.

При слабом затухании колебания тока и напряжения на конденсаторе сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Поэтому в моменты времени, когда величина напряжения на конденсаторе максимальна, ток в контуре равен нулю, и наоборот, когда величина тока максимальна, напряжение равно нулю. Если сопротивление контура равно нулю, то энергия сохраняется, и в соответствии с отмеченным выше фазовым соотношением

$$W = \frac{Cu_m^2}{2} = \frac{Li_m^2}{2},$$

где u_m и i_m - максимальные значения напряжения на конденсаторе и тока в контуре. Если $R \neq 0$, то запасенная в контуре энергия убывает со временем. В частности, для моментов времени t_1, t_2, t_3 , указанных на рис.2, выполняются неравенства

$$W_1 > W_2 > W_3, \quad (12)$$

где

$$W_1 = \frac{C}{2}(u(t_1))^2; \quad W_2 = \frac{L}{2}(i(t_2))^2; \quad W_3 = \frac{C}{2}(u(t_3))^2.$$

В данном упражнении неравенство (12) проверяется экспериментально.

Напряжения на конденсаторе $u(t_1), u(t_3)$ и напряжение на резисторе $u_R(t_2)$ определите с помощью осциллографа. Результаты измерений представьте в рабочей тетради, как показано в табл.3. Рассчитать силу тока $i(t_2)$ и энергии W_1, W_2, W_3 можно позже при обработке экспериментальных данных.

Таблица 3

К упражнению 3

Упражнение 3. Проверка закона сохранения энергии			
Параметры	В делениях	Цена деления, В/дел	В вольтах
$u(t_1)$			
$u(t_3)$			
$u_R(t_2)$			

Упражнение 4. Определение коэффициента затухания и активного сопротивления контура при $R_M = 0$.

Согласно формуле (8) амплитуда затухающих колебаний должна уменьшаться со временем по экспоненциальному закону. Чтобы проверить это экспериментально и определить коэффициент затухания, измерьте через каждый период колебаний амплитудные значения напряжения на конденсаторе $u_1, u_2, u_3 \dots$ (см. рис.2,а). Результаты измерений представьте в рабочей тетради, как показано в табл.4. Величину $\ln(u_1 / u_k)$ и ее погрешность можно рассчитать позже при обработке экспериментальных данных.

Таблица 4

К упражнению 4

Упражнение 4. Определение коэффициента затухания и активного сопротивления контура при $R_M = 0$											
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t , периоды	0	T	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$	$7T$	$8T$	$9T$	$10T$
u_k , дел											
t , мс											
$\ln(u_1 / u_k)$											
$\Delta(\ln(u_1 / u_k))$											

Упражнение 5. Определение коэффициента затухания и активного сопротивления контура при $R_M = 200$ Ом (выполняется по согласованию с преподавателем).

С помощью магазина сопротивлений увеличьте сопротивление контура на $\Delta R = R_M = 200$ Ом и повторите действия, описанные в упражнении 4. В первой строке новой таблицы напишите «Упражнение 5. Определение коэффициента затухания и активного сопротивления контура при $R_M = 200$ Ом».

Обработка экспериментальных данных

1. По результатам измерений в упражнении 2 рассчитайте приборную погрешность δT периода колебаний, относительную δL и абсолютную ΔL погрешности индуктивности. Для каждой величины запишите формулу, числовое выражение, результат вычислений и размерность. Округлите значения индуктивности и ее погрешности, запишите результат в виде: $L = (\dots \pm \dots)$ Гн.

2. По результатам измерений $u(t_1)$, $u(t_3)$ и $u_R(t_2)$ в упражнении 3 вычислите энергии W_1 , W_2 и W_3 . При этом силу тока $i(t_2)$ рассчитайте по закону Ома: $i(t_2) = u_R(t_2) / R_T$ (для данной установки $R_T = 200$ Ом).

Проверьте выполнение неравенства (12). Если оно не выполняется, то следует проверить результаты расчетов и измерений.

3. Вычислите приборные погрешности $\delta u(t_1)$, $\delta u_R(t_2)$ и $\delta u(t_3)$ напряжений, измеренных в упражнении 3, рассчитайте относительные δW_1 , δW_2 , δW_3 и абсолютные ΔW_1 , ΔW_2 , ΔW_3 погрешности энергий. После округления запишите результаты в виде:

$$W_1 = (\dots \pm \dots) \text{ Дж,}$$

$$W_2 = (\dots \pm \dots) \text{ Дж,}$$

$$W_3 = (\dots \pm \dots) \text{ Дж.}$$

4. По результатам упражнений 4 и 5 постройте на одном листе миллиметровки графики зависимости $\ln(u_1 / u_k)$ от t при $R_M = 0$ и $R_M = 200$ Ом. Нанесите поля погрешности. Напомним, что $\Delta(\ln f) = |(\ln f)'| \Delta f = \Delta f / f = \delta f$. Поэтому $\Delta(\ln(u_1 / u_k)) = \delta u_1 + \delta u_k$. В расчетах можно принять $\delta u_1 \approx \delta u_k \approx 5\%$.

5. Из формулы (8) следует, что

$$u_k = u_1 e^{-\beta t}, \quad \ln(u_1 / u_k) = \beta t.$$

Следовательно, график зависимости $\ln(u_1 / u_k)$ от t должен быть линейным с угловым коэффициентом равным β . Определите максимальный и минимальный угловые коэффициенты каждой прямой,

коэффициенты затухания β_1, β_2 , их погрешности $\Delta\beta_1, \Delta\beta_2$, сопротивления контура R_1, R_2 , погрешности $\Delta R_1, \Delta R_2$. Основные результаты сведите в табл.5.

Таблица 5

К упражнениям 4 и 5

Коэффициенты затухания и сопротивления контура	
при $R_M = 0$	при $R_M = 200 \text{ Ом}$
$\beta_{1\min} = \dots 1/c$	$\beta_{2\min} = \dots 1/c$
$\beta_{1\max} = \dots 1/c$	$\beta_{2\max} = \dots 1/c$
$\beta_1 = (\dots \pm \dots) 1/c$	$\beta_2 = (\dots \pm \dots) 1/c$
$R_1 = (\dots \pm \dots) \text{ Ом}$	$R_2 = (\dots \pm \dots) \text{ Ом}$

6. Сформулируйте выводы по работе, укажите формулы, проверенные экспериментально.

Подготовка к работе

1. Физические понятия, величины, явления, законы, знание которых необходимо для успешного выполнения работы:

- электрический ток, сила тока, электрическое напряжение, закон Ома, закон Джоуля - Ленца;
- емкость конденсатора, энергия заряженного конденсатора;
- магнитный поток, индуктивность, энергия катушки;
- гармонические колебания, затухающие колебания, амплитуда и частота затухающих колебаний, коэффициент затухания, добротность.

2. Приведите в рабочей тетради подробный вывод всех соотношений теоретической части работы.

3. Изучите экспериментальную часть работы. Зарисуйте в тетради электрическую схему установки.

Расчетное задание.

Сопротивление колебательного контура $R = 300$ Ом, емкость конденсатора $C = (10 \cdot N)$ нФ, индуктивность катушки $L = (0,2 \cdot K)$ Гн (где N - номер бригады; K - порядковый (по алфавиту) номер студента в бригаде). Рассчитайте ω_0 , β , ω , T . Приняв $U_0 = 10$ В, $\alpha = 0$, рассчитайте зависимость $u(t)$ при $0 \leq t \leq 4T$ и постройте график этой зависимости. Рекомендуем использовать любую доступную компьютерную программу построения графиков, например, yotx.ru, excel, matlab, maple.

Литература

1. ***Иродов И.Е.*** Электромагнетизм. Основные законы. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. - 319 с. . - URL: <https://e.lanbook.com/book/94160> (дата обращения 21 июня 2019). §§ 11.1, 11.2.
2. ***Савельев И.В.*** Курс общей физики: в 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / *под общ. ред. И.В. Савельева.* - СПб.: Лань, 2008. - 500 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/113945> (дата обращения 21 июня 2019). §§ 88 - 90.