

## Лабораторная работа № 6

### Конденсатор в цепи переменного тока

**Цель работы:** исследование зависимости проводимости конденсатора от частоты синусоидального тока. Определение емкости конденсатора и диэлектрической проницаемости пластины, расположенной между его обкладками.

**Приборы и оборудование:** плоский конденсатор, диэлектрическая пластина, генератор синусоидального напряжения, два цифровых вольтметра.

**Продолжительность работы:** 4 часа.

### Теоретическая часть

В работе исследуется плоский конденсатор, который представляет собой две плоские металлические пластины (обкладки), расположенные параллельно друг другу, причем заряд одной пластины  $q$ , а другой -  $(-q)$ . Расстояние между пластинами  $d$  предполагается малым по сравнению с линейными размерами пластин. В этом случае распределение зарядов по пластинам и электрическое поле  $\vec{E}$  между пластинами в первом приближении можно считать однородными, т.е. не зависящими от координаты (рис.1):

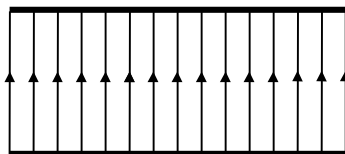


Рис.1. Поле плоского конденсатора без учета краевых эффектов

$$\sigma = \frac{q}{S}, \quad E = \frac{u}{d}, \quad (1)$$

где  $\sigma$  - поверхностная плотность заряда;  $S$  - площадь пластины;  $u$  - напряжение на конденсаторе.

Для напряженности электрического поля в конденсаторе с помощью теоремы Гаусса можно найти

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость вещества между пластинами;  $\varepsilon_0$  - электрическая постоянная. Из формул (1), (2) следует, что заряд конденсатора пропорционален приложенному к нему напряжению

$$q = Cu. \quad (3)$$

Коэффициент пропорциональности

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \quad (4)$$

называют электроемкостью (или просто емкостью) конденсатора.

При более строгом анализе плоского конденсатора следует учесть, что поверхностная плотность заряда  $\sigma$  не является постоянной по всей поверхности пластины, а увеличивается вблизи ее краев. Вблизи краев нарушается также предположение об однородности электрического поля, поэтому формулы (1), использовавшиеся при выводе выражения (4), являются приближенными. Они выполняются тем точнее, чем меньше отношение  $d$  к линейным размерам пластин конденсатора.

Схематически поле плоского конденсатора с учетом отмеченных выше краевых эффектов изображено на рис.2.

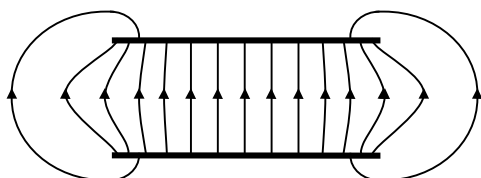


Рис.2. Поле плоского конденсатора с учетом краевых эффектов

Как видно из рис.2, линии поля сгущаются вблизи краев конденсатора, что связано с концентрацией заряда у краев пластин. Кроме того, некоторые линии поля начинаются и заканчиваются не на внутренних, а на

внешних поверхностях пластин. Это означает, что некоторая часть заряда располагается на внешних поверхностях пластин конденсатора.

Строгий расчет емкости плоского конденсатора с учетом краевых эффектов представляет собой сложную задачу. Приведем без вывода приближенную формулу, учитывающую краевые эффекты для плоского

«воздушного» конденсатора с *круглыми* пластинами, когда их радиус  $r \gg d$ :

$$C = C_0 \left( 1 + \frac{3d}{4r} + \frac{d}{\pi r} \ln \frac{r}{d} \right), \quad (5)$$

где  $C_0 = \epsilon_0 S / d$  - емкость конденсатора без учета краевых эффектов; второе слагаемое учитывает неоднородность распределения заряда на внутренних поверхностях пластин; третье слагаемое - частичное вытеснение заряда на внешние поверхности пластин.

Если в пространство между обкладками конденсатора параллельно им ввести плоскую пластину из диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$ , толщиной  $h < d$ , то емкость конденсатора будет равна

$$C' = C \frac{\epsilon d}{\epsilon d - (\epsilon - 1)h}, \quad (6)$$

где  $C$  - емкость конденсатора без диэлектрика.

Отметим, что конденсатором можно считать любую пару проводников, независимо от их формы и расположения. И в этом случае *емкостью конденсатора* называется коэффициент пропорциональности между зарядом конденсатора (так называют заряд положительной обкладки) и разностью потенциалов между обкладками. Емкость конденсатора зависит от формы, геометрических размеров обкладок, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости среды.

Рассмотрим теперь случай, когда конденсатор включен в цепь переменного тока  $i = I_m \cos \omega t$ , где  $I_m$  - амплитуда тока;  $\omega$  - циклическая частота. Тогда напряжение на конденсаторе

$$u = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t.$$

Это выражение можно переписать в виде:

$$u = U_m \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (7)$$

где  $U_m$  - амплитуда напряжения на конденсаторе, определяемая формулой:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m \quad (8)$$

В цепях переменного тока обычно измеряют не амплитудные, а эффективные значения тока и напряжения:

$$I_{\text{эфф}} = I_m / \sqrt{2}, \quad U_{\text{эфф}} = U_m / \sqrt{2}.$$

Обозначая далее эффективное напряжение на конденсаторе  $U_C$ , перепишем выражение (8) в виде:

$$I_{\text{эфф}} = \frac{U_C}{X_C}, \quad (9)$$

где

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}; \quad (10)$$

$\nu = \omega / 2\pi$  - частота, измеряемая в герцах. Формула (9) имеет вид закона Ома, поэтому величину  $X_C$  называют емкостным сопротивлением, а обратную ей величину  $Y_C = 1 / X_C = 2\pi\nu C$  - емкостной проводимостью. Отметим, что в формуле (9) фигурируют не мгновенные значения тока  $i$  и напряжения  $u$ , определенные в один и тот же момент времени, а их эффективные (или максимальные) значения. Поскольку ток  $i = I_m \cos \omega t$  и напряжение  $u$  в соответствии с (7) изменяются с фазовым сдвигом  $\pi / 2$ , то максимальные значения тока  $i = I_m$  и напряжения  $u = U_m$  достигаются в разные моменты времени.

Закон Ома для переменного тока в виде формул (9), (10) проверяется в данной работе экспериментально.

### Описание эксперимента

Схема измерений показана на рис.3. Переменное напряжение частотой  $\nu = (2 \dots 20)$  кГц подается с выхода генератора Г на конденсатор и включенный последовательно с ним резистор известного сопротивления  $R$ . Эффективное значение напряжения на выходе генератора измеряется вольтметром  $V_C$ . Резистор  $R$  служит для определения тока через конденсатор:

$$I_{\text{эфф}} = U_R / R.$$

Эффективное значение напряжения на резисторе  $U_R$  измеряется вольтметром  $V_R$ .

Величина сопротивления резистора  $R$  выбрана достаточно малой, так что выполняется неравенство  $R \ll X_C = 1/\omega C$ . В этом случае измеряемое вольтметром  $V_C$  напряжение можно считать равным напряжению на конденсаторе.

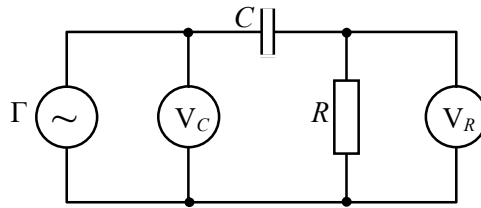


Рис.3. Электрическая схема установки

В пространство между пластинами конденсатора может быть введена пластина из диэлектрика. По изменению величины емкости конденсатора определяется диэлектрическая проницаемость диэлектрика  $\epsilon$ .

### Эксперимент

Запишите в табл.1 заданные в лабораторной работе величины (параметры) и марки используемых приборов.

Таблица 1

#### Параметры и приборы

$U_C = \dots$ В (определяется инженером или преподавателем)	
<i>Параметры:</i>	<i>Приборы:</i>
$R = (\dots \pm \dots)$ Ом	Генератор ....
$r = (\dots \pm \dots)$ мм	Вольтметр $V_C$ ...
$d = (\dots \pm \dots)$ мм	Вольтметр $V_R$ ...

**Упражнение 1.** Определение емкости «воздушного» конденсатора.

Убедитесь, что между обкладками конденсатора нет диэлектрической пластины. Установите частоту генератора  $\nu = 20$  кГц, а напряжение на выходе генератора (измеряется вольтметром  $V_C$ )  $U_C = (5 \dots 7)$  В в со-

ответствии с индивидуальным заданием. Определите напряжение  $U_R$  на сопротивлении  $R$  и рассчитайте величину тока  $I_{эфф} = U_R / R$ . С помощью формул (9), (10) найдите емкость конденсатора  $C$ . Полученное значение  $C = C_{эксп}$  сравните с теоретическим  $C = C_0$ , рассчитанным по формуле (4). Результаты измерений и расчетов представьте в рабочей тетради как показано в табл.2. В ее последней строке запишите расчетные формулы для  $C_{эксп}$  и  $C_0$ , числовые выражения, полученные после подстановки в формулы численных значений, результаты вычислений и размерности (см. п. 6 Приложения 2 на с. 105). Так же поступайте при вычислении других величин.

Если значения  $C_{эксп}$  и  $C_0$  отличаются более, чем на 20 %, то обратитесь к преподавателю или инженеру.

**Таблица 2**

**К упражнению 1**

<b>Упражнение 1.</b> Определение емкости конденсатора при частоте $\nu = 20$ кГц		
	Предел измерений	Измеренная величина
$U_C$ , В		
$U_R$ , мВ		
Расчет емкости по результатам измерений: $C_{эксп} = \dots$ Расчет емкости по формуле (4): $C_0 = \dots$		

**Упражнение 2.** Измерение зависимости от частоты емкостной проводимости  $Y_C = I_{эфф} / U_C$  «воздушного» конденсатора.

Изменяя частоту переменного напряжения в пределах (2...20) кГц, снимите зависимость  $U_R$  от частоты  $\nu$  при заданном напряжении  $U_C$ .

Результаты измерений запишите в табл.3. Емкостную проводимость  $Y_C = I_{эфф} / U_C = U_R / (RU_C)$  и ее погрешности  $\delta Y_C$ ,  $\Delta Y_C$  можно считать позже при обработке экспериментальных данных.

## К упражнению 2

Упражнение 2. «Воздушный» конденсатор						
$\nu$ , кГц						
$U_R$ , мВ						
$Y_C$ , $10^{-6} \text{ Ом}^{-1}$						
$\delta Y_C$ , %						
$\Delta Y_C$ , $10^{-6} \text{ Ом}^{-1}$						

**Упражнение 3.** Измерение зависимости от частоты емкостной проводимости  $Y_C = I_{\text{эфф}} / U_C$  конденсатора с диэлектрической пластиной между обкладками.

Установите между пластинами конденсатора диэлектрическую пластину и повторите действия, описанные в упражнении 2. В первой строке новой таблицы напишите «Упражнение 3. Конденсатор с пластиной».

## Обработка экспериментальных данных

1. По результатам измерений в упражнении 1 рассчитайте приборные погрешности напряжений  $\delta U_C$ ,  $\delta U_R$ , а также относительную  $\delta C_{\text{эксп}}$  и абсолютную  $\Delta C_{\text{эксп}}$  погрешности емкости. Для каждой величины запишите в тетради формулу, числовое выражение, результат вычислений, размерность. Округлив значения емкости и ее погрешности, запишите результат в виде  $C_{\text{эксп}} = (\dots \pm \dots)$  пФ.

2. Рассчитайте емкость  $C_{\text{теор}}$  по формуле (5), которая, в отличие от выражения (4), учитывает краевые эффекты. Вычислите погрешности  $\delta C_{\text{теор}}$  и  $\Delta C_{\text{теор}}$ , запишите результат в виде  $C_{\text{теор}} = (\dots \pm \dots)$  пФ. При выводе формулы для  $\delta C_{\text{теор}}$  можно не учитывать погрешность второго сомножителя в выражении (5), так как он близок к единице, поэтому  $\delta C_{\text{теор}} \approx \delta C_{\infty} = \delta S + \delta d = 2\delta r + \delta d$ .

3. Используя результаты измерений в упражнении 2, рассчитайте и запишите в табл.3 значения емкостной проводимости  $Y_C = I_{\text{эфф}} / U_C = U_R / (U_C R)$  и ее погрешности

$$\delta Y_C = \delta U_R + \delta U_C + \delta R, \quad \Delta Y_C = Y_C \delta Y_C.$$

Постройте график зависимости  $Y_C$  от частоты  $\nu$ , отметьте на графике поля погрешностей экспериментальных точек.

4. Проведите прямую - график теоретической зависимости  $Y_C = 1 / X_C$  от  $\nu$ , построенный с помощью формулы (10). При этом значение емкости примите равным  $C_{\text{теор}}$ . Убедитесь, что эта прямая не выходит за пределы полей погрешностей экспериментальных точек. График (размером примерно с тетрадный лист) вклейте в тетрадь.

5. Используя результаты измерений в упражнении 3, рассчитайте и занесите в таблицу значения емкостной проводимости и ее погрешности для конденсатора с диэлектрической пластиной между обкладками. Нанесите точки на график зависимости  $Y_C$  от  $\nu$ . По линейке проведите прямую так, чтобы число экспериментальных точек выше и ниже прямой было примерно одинаковым (заметим, что при строгом подходе прямая проводится так, чтобы сумма квадратов расстояний от точек до прямой была минимальной). Нанесите на график поля погрешностей  $\Delta Y_C$ . Определите угловой коэффициент  $\gamma$  проведенной прямой и рассчитайте емкость  $C' = \gamma / 2\pi$  конденсатора с диэлектрической пластиной. Относительную погрешность  $\delta C' = \delta Y_C + \delta \nu \approx \delta Y_C$  рассчитайте для фиксированной частоты  $\nu = 20$  кГц. Рассчитав абсолютную погрешность  $\Delta C'$ , запишите результат в виде  $C'_{\text{эксп}} = (\dots \pm \dots)$  пФ.

6. Рассчитайте величину диэлектрической проницаемости по формуле

$$\varepsilon = \frac{C'_{\text{эксп}} h}{C_{\text{эксп}} d - C'_{\text{эксп}} (d - h)}, \quad (11)$$

которая следует из выражения (6).

7. Вычислите относительную и абсолютную погрешности диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ . При выводе формулы для  $\delta \varepsilon$  можно принять  $d = h$ , тогда из формулы (11) следует  $\delta \varepsilon \approx \delta C_{\text{эксп}} + \delta C'_{\text{эксп}}$ .

8. Основные результаты работы сведите в табл.4:



Таблица 4

## Основные результаты

Расчет по формуле (5)	$C_{\text{теор}} = (\dots \pm \dots)$ пФ
Измерения при $\nu = 20$ кГц	$C_{\text{эксп}} = (\dots \pm \dots)$ пФ
График зависимости $Y_C$ от $\nu$	Согласуется (не согласуется) с формулами (9), (10)
Емкость конденсатора с диэлектрической пластиной	$C'_{\text{эксп}} = (\dots \pm \dots)$ пФ
Диэлектрическая проницаемость	$\varepsilon = (\dots \pm \dots)$

9. Сформулируйте выводы по работе, укажите формулы, проверенные экспериментально.

## Подготовка к работе

1. Физические понятия, величины, явления, законы, знание которых необходимо для успешного выполнения работы:

- емкость;
- переменный ток, амплитуда, частота, циклическая частота, период, фаза колебаний;
- эффективные значения переменного тока и напряжения;
- емкостное сопротивление.

2. Приведите в рабочей тетради подробный вывод всех соотношений теоретической части работы.

3. При выводе формулы (6) следует предположить, что диэлектрическая пластина расположена параллельно обкладкам конденсатора. Тогда трехслойный конденсатор можно рассмотреть как последовательное соединение трех конденсаторов, один из которых (с расстоянием между обкладками  $h$ ) полностью заполнен диэлектриком, а два других - воздушные. Заметим, что емкость такого трехслойного конденсатора не зависит от того, где конкретно расположена диэлектрическая пластина в зазоре.

4. Изучите экспериментальную часть работы. Приведите в рабочей тетради электрическую схему измерений.

5. Обратите внимание на то, что переменный ток протекает в цепи из-за периодической перезарядки конденсатора. При изменении напряжения на конденсаторе меняется заряд обкладок, поэтому происходит перенос заряда в проводах, подключенных к обкладкам.

6. При подготовке к работе рекомендуем изучить Приложения 2 и 4 на с.103 и 125 соответственно.

**Расчетное задание.**

1. Рассчитайте по формуле (5) емкость воздушного конденсатора, а также поправку  $\delta C = (C - C_0) / C_0$ , обусловленную учетом краевых эффектов. В расчетах примите  $d = 5$  мм,  $\varepsilon = 1$ ,  $r = (45 + 5N)K$  мм, где  $N$  - номер бригады;  $K$  - номер (по алфавиту) студента в бригаде ( $K = 1, 2$  или  $3$ ).

2. Рассчитайте емкостное сопротивление конденсатора при частоте  $\nu = 20$  кГц и эффективное значение тока через конденсатор при напряжении  $U_C = 6$  В.

### ***Литература***

1. ***Иродов И.Е.*** Электромагнетизм. Основные законы. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. - 319 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/94160> (дата обращения 21 июня 2019). §§ 11.1 - 11.4, 2.1, 2.2, 2.6.

2. ***Савельев И.В.*** Курс общей физики: в 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / *под общ. ред. И.В. Савельева.* - СПб.: Лань, 2008. - 500 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/113945> (дата обращения 21 июня 2019). §§ 91, 92.