

Лабораторная работа № 7

Индуктивность в цепи переменного тока

Цель работы: исследование зависимости сопротивления соленоида от частоты синусоидального тока, определение индуктивности соленоида, а также взаимной индуктивности коаксиальных соленоида и короткой катушки.

Приборы и оборудование: соленоид и короткая катушка на коммутационной плате, генератор синусоидального напряжения, два вольтметра.

Продолжительность работы: 4 часа.

Теоретическая часть

Рассмотрим тонкий замкнутый провод, по которому течет ток i . По закону Био и Савара созданное этим током магнитное поле \vec{B} в каждой точке пространства пропорционально i . Поэтому и поток Φ вектора \vec{B} через замкнутый контур, образованный проводом, пропорционален току i :

$$\Phi = Li.$$

Коэффициент пропорциональности L зависит от конфигурации и геометрических размеров контура и называется его индуктивностью.

Для увеличения индуктивности в электротехнике и радиотехнике широко применяются проволочные катушки с достаточно плотной винтовой намоткой - соленоиды (рис.1). Если шаг винтовой линии мал по сравнению с радиусом витка r , а длина соленоида l значительно превышает этот радиус, то магнитное поле внутри такого *длинного соленоида* ($l \gg r$) практически однородно и направлено вдоль его оси (рис.1,*a*). Величина магнитной индукции может быть найдена, например, с помощью теоремы о циркуляции вектора \vec{B} :

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{l} i,$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная; N_1 - число витков.

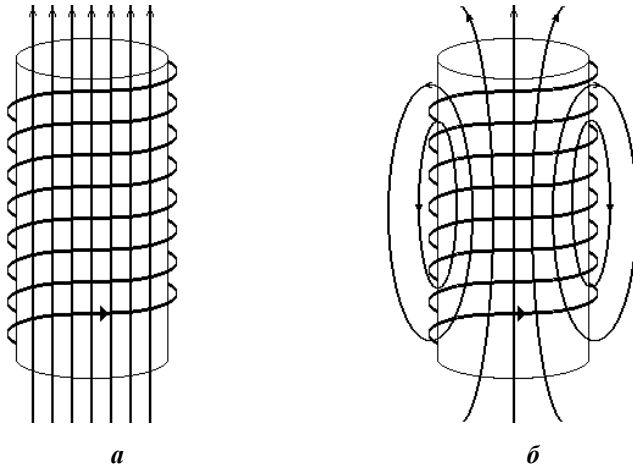


Рис.1. Линии индукции магнитного поля бесконечно длинного соленоида (а) и соленоида конечной длины (б)

Далее нетрудно вычислить магнитный поток через витки соленоида

$$\Phi = SBN_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l} i$$

и его индуктивность

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l}, \quad (1)$$

где $S = \pi r^2$ - площадь каждого витка. Заметим, что соленоид с разомкнутыми выводами не представляет замкнутого контура, но такой контур образуется при включении соленоида в цепь. Поскольку магнитный поток через витки соленоида обычно значительно превышает поток через остальную часть замкнутого проводящего контура, то можно считать, что индуктивность контура определяется индуктивностью включенного в него соленоида.

Строго говоря, индукция магнитного поля в соленоиде не является постоянной, а уменьшается примерно в два раза при приближении к его торцам (см. рис.1,б и лабораторную работу № 3). Поэтому формула (1) дает для индуктивности завышенное значение. Приведем без вывода формулу для расчета индуктивности длинного ($l \gg r$) соленоида с учетом такого краевого эффекта:

$$L = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l} \left(1 - \frac{8r}{3\pi l} \right). \quad (2)$$

Рассмотрим теперь случай, когда через соленоид, индуктивность которого L , протекает переменный ток

$$i = I_m \cos \omega t$$

частоты ω и амплитуды I_m . По закону электромагнитной индукции в цепи возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \sin \omega t.$$

Напряжение на соленоиде u определим по закону Ома для участка цепи, содержащего эту ЭДС:

$$u = iR - \mathcal{E}.$$

Сопротивление R провода, которым намотан соленоид, во многих случаях целесообразно рассматривать в качестве отдельного элемента цепи. Иными словами, реальный соленоид можно представить в виде последовательно соединенных идеального соленоида индуктивностью L , который не имеет сопротивления, и резистора сопротивлением R , который не обладает индуктивностью. Сопротивление R называют активным сопротивлением соленоида. Напряжение на индуктивности (т.е. на идеальном соленоиде, когда $R = 0$)

$$u = -\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin \omega t = U_m \cos(\omega t + \pi/2),$$

где $U_m = \omega L I_m$ - амплитуда колебаний напряжения u .

Следовательно, эффективные значения напряжения на индуктивности $U_L = U_m / \sqrt{2}$ и тока в ней $I_{\text{эфф}} = I_m / \sqrt{2}$ связаны соотношением

$$I_{\text{эфф}} = \frac{U_L}{X_L}, \quad (3)$$

где

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L; \quad (4)$$

$\nu = \omega / 2\pi$ - частота, измеряемая в герцах. Формула (3) имеет вид закона Ома, поэтому величину X_L называют индуктивным сопротивлением. Заметим, что в формуле (3) фигурируют не мгновенные значения тока i и напряжения u , определенные в один и тот же момент времени, а их эффективные (или максимальные) значения. Поскольку ток $i = I_m \cos \omega t$ и напряжение $u = U_m \cos(\omega t + \pi/2)$ изменяются с фазовым сдвигом $\pi/2$, максимальные значения тока $i = I_m$ и напряжения $u = U_m$ достигаются в разные моменты времени.

Индуктивное сопротивление (4) увеличивается с ростом частоты и при достаточно высоких частотах ($\omega L \gg R$) значительно превышает активное сопротивление R . В этом случае формулы (3), (4) применимы и для реального соленоида, обладающего активным сопротивлением. Закон Ома для переменного тока в виде выражений (3), (4) проверяется в данной работе экспериментально.

Рассмотрим теперь случай, когда вблизи соленоида расположена проволочная катушка. При протекании в соленоиде тока i возникает магнитное поле \vec{B} , которое создает магнитный поток Φ_{12} через витки катушки. Из закона Био и Савара следует, что поток Φ_{12} пропорционален току i :

$$\Phi_{12} = L_{12}i.$$

Коэффициент пропорциональности L_{12} зависит от геометрических размеров соленоида, катушки, их взаимного расположения и называется взаимной индуктивностью контуров - соленоида и катушки. Если ток i в соленоиде переменный $i = I_m \cos \omega t$, то в катушке возникает ЭДС

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{di}{dt} = \omega L_{12} I_m \sin \omega t.$$

Напряжение на выводах разомкнутой катушки $u_2 = -\dot{\mathcal{E}}_2$, а эффективное значение этого напряжения

$$U_{L2} = \omega L_{12} I_{\text{эфф}}. \quad (5)$$

Выражение (5) используется в данной работе для экспериментального определения взаимной индуктивности.

Если катушка плотно «надета» на длинный соленоид вдали от его торцов, то взаимную индуктивность L_{12} можно рассчитать теоретически. В этом случае

$$\Phi_{12} = SB N_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} i$$

и, следовательно,

$$L_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}, \quad (6)$$

где N_2 - число витков в катушке.

Описание эксперимента

Электрическая схема установки показана на рис.2.

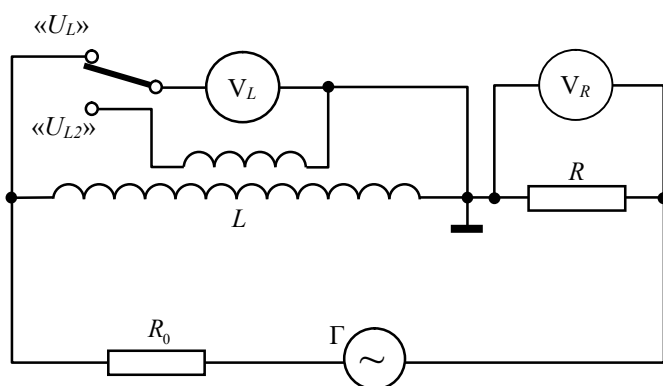


Рис.2. Электрическая схема установки

Переменный ток, возбуждаемый генератором Γ , протекает через резистор R , соленоид L и резистор R_0 . Для определения эффективного

значения $I_{\text{эфф}}$ этого тока используется вольтметр V_R . С его помощью измеряется эффективное значение напряжения U_R на резисторе R , затем по закону Ома рассчитывается $I_{\text{эфф}}$:

$$I_{\text{эфф}} = U_R / R.$$

Резисторы, специально включаемые в цепь для определения тока, часто называют токовыми сопротивлениями. Резистор R_0 предназначен для ограничения величины протекающего в цепи тока.

Вольтметр V_L измеряет эффективное значение напряжения на соленоиде, когда переключатель находится в положении « U_L ». Если же этот переключатель находится в положении « U_{L2} », то вольтметр V_L измеряет напряжение на короткой катушке с несколько большим диаметром, чем у соленоида, которая «надета» на соленоид.

Эксперимент

Запишите в табл.1 заданные в лабораторной работе величины (параметры) и марки используемых приборов.

Таблица 1

Параметры и приборы

$U_L = \dots$ В (определяется инженером при частоте $\nu = 20$ кГц)	
<i>Параметры:</i>	<i>Приборы:</i>
$R = (\dots \pm \dots)$ Ом	Генератор
$l = (\dots \pm \dots)$ мм	Вольтметр V_L ...
$r = (\dots \pm \dots)$ мм	Вольтметр V_R ...
$N_1 =$	
$N_2 =$	

Упражнение 1. Определение индуктивности соленоида.

Переключатель установите в положение « U_L ». Частоту $\nu = \omega / 2\pi$ переменного напряжения на выходе генератора установите равной 20 кГц. Регулируя выходное напряжение генератора, установите напря-

жение U_L в соответствии с индивидуальным заданием. С помощью вольтметра V_R измерьте эффективное значение напряжения на токовом сопротивлении U_R . Воспользовавшись формулами (3), (4) рассчитайте индуктивность соленоида.

Полученное значение $L = L_{\text{эксп}}$ сравните с теоретическим $L = L_{\infty}$, рассчитанным по формуле (1). Результаты измерений и расчетов представьте в рабочей тетради как показано в табл.2. В ее последней строке запишите формулы для $L_{\text{эксп}}$ и L_{∞} , числовые выражения, полученные после подстановки в формулы численных значений, результаты вычислений и размерности (см. п. 6 Приложения 2 на с. 105). Так же поступайте при вычислении других величин. Если вычисленные значения $L_{\text{эксп}}$ и L_{∞} отличаются более, чем на 20 %, то следует обратиться к преподавателю или инженеру.

Таблица 2

К упражнению 1

Упражнение 1. Определение индуктивности катушки при частоте $\nu = 20$ кГц		
Параметры	Предел измерений	Измеренная величина
U_L , В		
U_R , мВ		
Расчет индуктивности по результатам измерений: $L_{\text{эксп}} = \dots$ Расчет индуктивности по формуле (1): $L_{\infty} = \dots$		

Упражнение 2. Измерение зависимости индуктивного сопротивления от частоты.

Изменяя частоту ν переменного напряжения в пределах от 2 до 20 кГц, измерьте зависимости U_L и U_R от частоты ν . Результаты измерений запишите в табл.3. Индуктивное сопротивление $X_L = U_L / I_{\text{эфф}} = U_L R / U_R$ и его погрешности δX_L , ΔX_L можно рассчитать позже при обработке экспериментальных данных.

Таблица 3

К упражнению 2

Упражнение 2. Зависимость индуктивного сопротивления от частоты							
ν , кГц							
U_L , В							
U_R , мВ							
X_L , Ом							
δX_L , %							
ΔX_L , Ом							

Упражнение 3. Определение взаимной индуктивности.

Для трех значений частоты ν в диапазоне (10...20) кГц измерьте напряжения U_{L2} (переключатель в положении « U_{L2} ») и соответствующие значения U_R . С помощью формулы (5) рассчитайте взаимную индуктивность L_{12} . Результаты запишите в табл.4.

Таблица 4

К упражнению 3

ν , кГц	20	16	10
U_{L2} , В			
U_R , мВ			
L_{12} , мГн			

Обработка экспериментальных данных

1. По результатам измерений в упражнении 1 рассчитайте приборные погрешности напряжений δU_L , δU_R , частоты $\delta \nu$, а также отно-

сительную $\delta L_{\text{эксп}}$ и абсолютную $\Delta L_{\text{эксп}}$ погрешности индуктивности. Округлите значения индуктивности и ее погрешности и запишите результат в виде: $L_{\text{эксп}} = (\dots \pm \dots)$ мГн. Напомним, здесь и далее для каждой величины запишите в тетради формулу, числовое выражение, результат вычислений, размерность.

2. Рассчитайте индуктивность по формуле (2), учитывающей, в отличие от выражения (1), краевые эффекты. Вычислите погрешности $\delta L_{\text{теор}}$, $\Delta L_{\text{теор}}$ и запишите результат в виде $L_{\text{теор}} = (\dots \pm \dots)$ мГн. При выводе формулы для $\delta L_{\text{теор}}$ можно не учитывать погрешность второго сомножителя в формуле (2), так как он близок к единице, поэтому $\delta L_{\text{теор}} \approx \delta S + \delta l = 2\delta r + \delta l$.

3. По результатам измерений в упражнении 2 рассчитайте индуктивное сопротивление $X_L = U_L / I_{\text{эфф}}$ и его погрешности δX_L , ΔX_L , запишите результаты расчетов в табл.3. Постройте график зависимости индуктивного сопротивления от частоты ν , укажите на графике поля погрешностей экспериментальных точек.

4. Проведите прямую - график теоретической зависимости X_L от ν , построенный с помощью (4). При этом значение индуктивности примите равным $L_{\text{теор}}$. Убедитесь, что эта прямая не выходит за пределы полей погрешностей экспериментальных точек. График (размером примерно с тетрадный лист) вклейте в тетрадь.

5. По результатам измерений в упражнении 3 рассчитайте взаимную индуктивность L_{12} для каждой частоты: $L_{12}(\nu_1)$, $L_{12}(\nu_2)$ и $L_{12}(\nu_3)$. Запишите вычисленные значения в табл.4. Вычислите среднее значение взаимной индуктивности $L_{12\text{эксп}}$ и ее погрешность $\Delta L_{12\text{эксп}}$.

6. Рассчитайте взаимную индуктивность по формуле (6).

7. Основные результаты работы сведите в табл.5.

8. Сформулируйте выводы по работе, укажите формулы, проверенные экспериментально.

Таблица 5

Основные результаты

Расчет по формуле (2)	$L_{\text{теор}} = (\dots \pm \dots) \text{ мГн}$
Измерения при $\nu = 20 \text{ кГц}$	$L_{\text{эксп}} = (\dots \pm \dots) \text{ мГн}$
График зависимости X_L от ν	Согласуется (не согласуется) с формулами (3), (4).
Взаимная индуктивность, рассчитанная по формуле (6)	$L_{12} = (\dots) \text{ мГн}$
Взаимная индуктивность, измеренная в упражнении 3	$L_{12\text{эксп}} = (\dots \pm \dots) \text{ мГн}$

Подготовка к работе

1. Физические понятия, величины, законы, знание которых необходимо для успешного выполнения работы:

- переменный ток, амплитуда, частота, циклическая частота, период, фаза;
- эффективные значения переменного тока и напряжения;
- магнитный поток, закон электромагнитной индукции;
- индуктивность, взаимная индуктивность;
- индуктивное сопротивление.

2. Приведите в рабочей тетради подробный вывод всех соотношений теоретической части работы.

3. Изучите экспериментальную часть работы. Приведите в рабочей тетради электрические схемы измерений в упражнениях 1 и 2.

4. При подготовке к работе рекомендуем изучить Приложения 2 и 4 на с. 103 и 125 соответственно.

Расчетное задание.

1. Рассчитайте по формуле (2) индуктивность соленоида, а также поправку

$$\delta L = (L - L_{\infty}) / L_{\infty} = \frac{8r}{3\pi l}$$

(где $L_{\infty} = \mu_0 N_1^2 S i / l$), обусловленную учетом краевых эффектов. В расчетах примите $N_1 = 700$ витков, $r = (10 + N)$ мм, $l = (30 + 10K)$ см, где N - номер бригады; K - номер (по алфавиту) студента в бригаде ($K = 1, 2$ или 3).

2. Рассчитайте индуктивное сопротивление такого соленоида при частоте $\nu = 20$ кГц. Постройте график зависимости индуктивного сопротивления соленоида от частоты ν в диапазоне $(2 \dots 20)$ кГц.

Литература

1. **Иродов И.Е.** Электромагнетизм. Основные законы. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. - 319 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/94160> (дата обращения 21 июня 2019). §§ 9.1 - 9.5, 11.1 - 11.4.

2. **Савельев И.В.** Курс общей физики: в 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / *под общ. ред. И.В. Савельева*. - СПб.: Лань, 2008. - 500 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/113945> (дата обращения 21 июня 2019). §§ 91, 92.