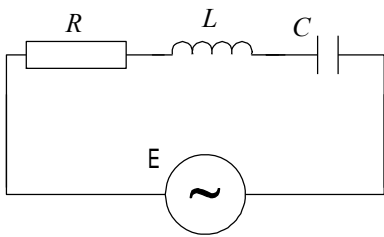


Вынужденные колебания в последовательном колебательном контуре

Цель работы: исследование амплитудно-частотной и фазово-частотной зависимостей напряжения на конденсаторе в последовательном колебательном контуре.

Приборы и оборудование: катушка, конденсатор, резистор переменного сопротивления, генератор синусоидального напряжения, цифровой вольтметр, электронный осциллограф.

Теоретическая часть



На рис.1 изображен последовательный колебательный контур. Согласно второму правилу Кирхгофа в любой момент времени алгебраическая сумма напряжений на элементах контура равна внешней ЭДС:

Рис.1. Последовательный колебательный контур

$$u_L + u_R + u_C = \mathcal{E}. \quad (1)$$

Здесь

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt - \quad (2)$$

мгновенные (зависящие от времени) напряжения на катушке, резисторе и конденсаторе; $i = dq/dt$ - сила тока в контуре; q - заряд конденсатора. Уравнение (1) с учетом (2) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\beta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 \mathcal{E}, \quad (3)$$

где

$$\omega_0^2 = 1/LC, \quad \beta = R/2L. \quad (4)$$

Нас будет интересовать случай, когда внешняя ЭДС меняется по гармоническому закону

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t$$

(\mathcal{E}_m и ω - амплитуда и частота колебаний ЭДС). Тогда частное решение уравнения (3), описывающее установившиеся колебания напряжения на конденсаторе, имеет вид:

$$u_C = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi_C), \quad (5)$$

где

$$U_{Cm} = \frac{\mathcal{E}_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} - \quad (6)$$

амплитуда колебаний напряжения u_C ; φ_C - фазовый сдвиг,

$$\operatorname{tg} \varphi_C = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Из формулы (5) видно, что напряжение на конденсаторе колеблется с частотой внешнего воздействия ω , которое оказывает на контур источник ЭДС \mathcal{E} . Такие колебания называют вынужденными, а частоту ω называют частотой вынужденных колебаний. Амплитуда U_{Cm} и фаза φ_C вынужденных колебаний зависят от частоты внешнего воздействия ω и параметров контура. Параметры контура (L , C и R) входят в формулы (6), (7) через величины ω_0 и β . Величина ω_0 представляет собой частоту собственных незатухающих колебаний, которые могли бы происходить в контуре в отсутствие внешнего воздействия и затухания, т.е. при $\mathcal{E} = 0$ и $R = 0$, а β - коэффициент затухания собственных колебаний в контуре с активным сопротивлением R .

Особый интерес представляют зависимости амплитуды U_{Cm} и фазы φ_C от частоты внешнего воздействия ω . Рассчитанные по форму-

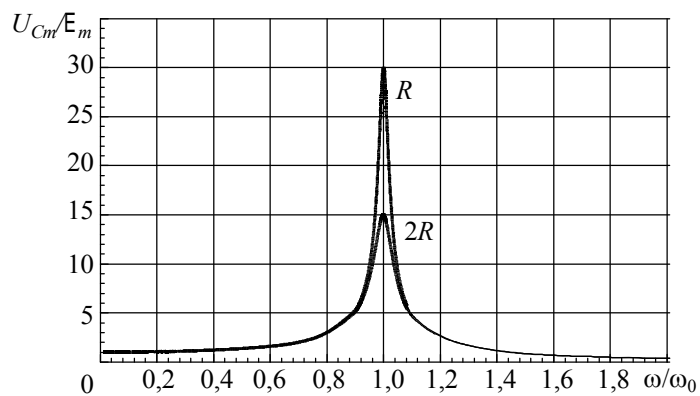


Рис.2. Амплитудно-частотные зависимости напряжения на конденсаторе

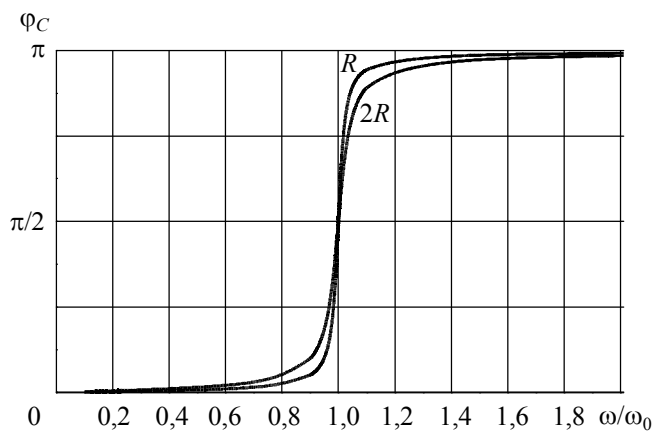


Рис.3. Фазово-частотные зависимости напряжения на конденсаторе

лам (6), (7) графики зависимостей $U_{Cm}(\omega)$ и $\varphi_C(\omega)$ в относительных единицах представлены на рис.2 и 3.

Амплитуда напряжения на конденсаторе достигает резкого максимума (резонанса) при частоте внешней ЭДС ω равной

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} . \quad (8)$$

Эту формулу нетрудно получить, исследуя на минимум подкоренное выражение в (6). Заметим, что резонансная частота в данном случае отличается как от собственной частоты незатухающих колебаний ω_0 , так и от частоты затухающих колебаний в контуре $\omega_{\text{зат}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Однако в большинстве практически важных случаев коэффициент затухания мал ($2\beta^2 \ll \omega_0^2$) и $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 \approx \omega_{\text{зат}}$. Амплитуда напряжения на конденсаторе в этом случае (при резонансе) определяется формулой

$$U_{Cm}(\omega_{\text{рез}}) \approx \frac{\omega_0}{2\beta} \mathcal{E}_m. \quad (9)$$

Важной характеристикой колебательного контура является добротность

$$Q = \frac{U_{Cm}(\omega_{\text{рез}})}{\mathcal{E}_m}, \quad (10)$$

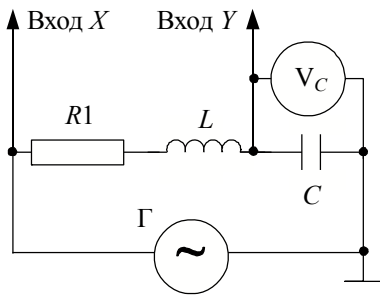
т.е. отношение амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе $U_{Cm}(\omega_{\text{рез}})$ к амплитуде внешней ЭДС. При слабом затухании ($2\beta^2 \ll \omega_0^2$)

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11)$$

При низких частотах, когда $\omega \ll \omega_0$ и $\omega \ll \omega_0^2 / 2\beta$, из формулы (6) следует

$$U_{Cm} \approx \mathcal{E}_m \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \approx \mathcal{E}_m. \quad (12)$$

Этот результат физически понятен: при низких частотах сопротивление конденсатора велико и на нем падает практически все приложенное к контуру напряжение. Из формулы (12) следует, что, если, например, частота колебаний в 10 раз меньше резонансной, то при слабом затухании амплитуда напряжения на конденсаторе отличается от \mathcal{E}_m примерно на 1%.



Описание эксперимента

Схема установки представлена на рис.4. Источником внешней ЭДС является генератор звуковой частоты. В контур последовательно включены резистор $R1$ переменного сопротивления, катушка индуктивности и конденсатор. Активное сопротивление контура

Рис.4. Электрическая схема установки

R определяется суммой сопротивления катушки (ее активного сопротивления, измеренного на постоянном токе), резистора $R1$ и выходного сопротивления генератора. Эффективное значение напряжения на конденсаторе $U_C = U_{Cm} / \sqrt{2}$ измеряется вольт-метром V_C .

Измерение фазового сдвига между напряжением на выходе генератора и напряжением на конденсаторе проводится с помощью фигур Лиссажу. Для этого напряжения с конденсатора и выхода генератора подаются на входы Y и X осциллографа:

$$U_Y = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi_C), \quad U_X = U_m \cos \omega t .$$

Смещения луча осциллографа по X и Y пропорциональны подаваемым сигналам:

$$Y = B \cos(\omega t - \varphi_C), \quad X = A \cos \omega t . \quad (13)$$

Уравнения (13) задают в параметрическом виде эллипс (рис.5). При $\varphi_C = \pm\pi$ эллипс переходит в отрезок прямой, при $A = B$ и $\varphi_C = \pm\pi/2$ - в окружность.

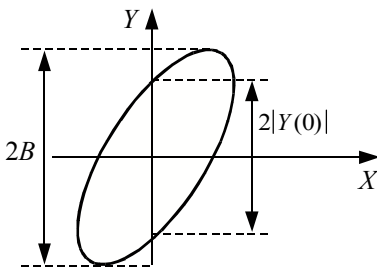


Рис.5. Фигура Лиссажу

Обозначим через $|Y(0)|$ модуль значения Y при $X = 0$. Из (13) следует, что

$$|\sin \varphi_C| = \frac{|Y(0)|}{B} . \quad (14)$$

В эксперименте для повышения

точности определения φ_C рекомендуется измерять (в делениях) и подставлять в (14) величины $2|Y(0)|$ и $2B$ (см. рис.5).

Выполнение работы

Упражнение 1. Исследование амплитудно-частотной зависимости.

1. Установите частоту генератора $\nu = 100 \dots 200$ Гц. Регулируя выходное напряжение генератора, установите напряжение на конденсаторе $U_C = 1$ В (измеряется вольтметром V_C). Частота ν в данном случае значительно меньше резонансной ($\nu / \nu_{\text{рез}} < 0,1$). Поэтому согласно (12) напряжение на конденсаторе отличается от ЭДС генератора менее чем на 1% и можно считать $\mathcal{E}_m = U_{Cm}$. Далее при выполнении данного упражнения ЭДС генератора не меняйте - эффективное значение ЭДС $\mathcal{E}_{\text{эфф}} = \mathcal{E}_m / \sqrt{2}$ будет оставаться равным установленному значению $U_C = 1$ В при низкой частоте.

2. Сопротивление переменного резистора $R1$ установите равным нулю. Активное сопротивление контура при этом будет равно сумме активного сопротивления катушки и выходного сопротивления генератора. Изменяя частоту ν в диапазоне (0,2...5) кГц, наблюдайте за изменением напряжения на конденсаторе, определите резонансную частоту $\nu_{\text{рез}}$ и напряжение при резонансе $U_C(\nu_{\text{рез}})$. Рассчитайте по формуле (10) добротность контура Q , а затем при помощи формулы (11) - активное сопротивление контура R (значения индуктивности и емкости контура указаны на стенде).

3. Используя (4), (8), определите теоретические значения $\nu_0 = \omega_0 / 2\pi$ и $\nu_{\text{рез}} = \omega_{\text{рез}} / 2\pi$, сравните их с экспериментальным значением резонансной частоты. Основные результаты измерений и расчетов сведите в таблицу:

Измерено	$\nu_{\text{рез}}, \text{кГц}$	Величина \pm погрешность
Измерено	$U_C(\nu_{\text{рез}}), \text{В}$	Величина \pm погрешность
Рассчитано	Q	Величина \pm погрешность

Рассчитано	R , Ом	Величина \pm погрешность
Рассчитано	ν_0 , кГц	Величина \pm погрешность
Рассчитано	$\nu_{рез}$, кГц	Величина \pm погрешность

4. Измерьте зависимость напряжения на конденсаторе U_C от частоты ν и постройте график этой зависимости. Число точек следует выбрать таким, чтобы резонансная кривая была "прорисована" достаточно подробно. На график нанесите также несколько точек, рассчитанных по формуле (6).

5. При помощи резистора $R1$ увеличьте сопротивление контура вдвое, измерьте зависимость U_C от ν и постройте на графике вторую резонансную кривую.

6. Сформулируйте и запишите в рабочую тетрадь выводы по данному упражнению.

Упражнение 2. Исследование фазово-частотной зависимости.

Для измерения разности фаз напряжения с конденсатора и выхода генератора подаются на входы Y и X осциллографа. Размеры эллипса на экране можно изменять, регулируя напряжение генератора и чувствительность осциллографа.

Исследование фазово-частотной зависимости $\varphi_C(\nu)$ проведите при том же сопротивлении контура, что и в п. 5 упражнения 1. Убедитесь, что при резонансной частоте фазовый сдвиг равен $\pi/2$, при частоте значительно меньшей резонансной фазовый сдвиг стремится к нулю, а при высоких частотах $\varphi_C \rightarrow \pi$. Измерьте фазовый сдвиг для нескольких значений частот в диапазоне $(0,6 \nu_{рез} \dots 1,4 \nu_{рез})$. Точки нанесите на график. Нанесите на тот же график несколько точек теоретической зависимости $\varphi_C(\nu)$, рассчитанной при помощи (7).

Замечание. Значение φ_C определяется по одной из следующих формул:

$$\varphi_C = \arcsin\left(\frac{2|Y(0)|}{2B}\right),$$

если большая полуось эллипса лежит в первом и третьем квадрантах;

$$\varphi_C = \pi - \arcsin\left(\frac{2|Y(0)|}{2B}\right),$$

если большая полуось эллипса лежит во втором и четвертом квадрантах.

При наблюдении фигуры Лиссажу на экране осциллографа SAGA и С1-94 считайте, что ось X направлена влево. Это связано с особенностью конструкции осциллографа.

Подготовка к работе

1. Физические понятия, величины, законы, соотношения, знание которых необходимо для успешного выполнения работы:

- вынужденные колебания; переменный ток; амплитуда; частота; циклическая частота; период колебаний;
- эффективные значения переменного тока и напряжения;
- реактивное сопротивление; активное сопротивление;
- явление резонанса; добротность колебательного контура.

2. Приведите в рабочей тетради вывод формул (6) - (11), (13), (14), электрическую схему установки.

3. При подготовке к работе рекомендуем изучить Приложение 4 учебно-методического пособия.

Расчетное задание.

1. Рассчитайте частоты ω_0 , $\omega_{рез}$, $\nu_{рез}$ для колебательного контура со следующими параметрами: $L = 100$ мГн, $R = 100$ Ом, $C = (10 \cdot N)$ нФ, где N - номер бригады.

2. Рассчитайте амплитуду напряжения на конденсаторе U_{Cm} и фазовый сдвиг φ_C при частотах:

Первый (по алфавиту) член бригады	а) $\omega = \omega_{рез}$, б) $\omega = 1,2 \omega_{рез}$;
Второй член бригады	а) $\omega = \omega_0$, б) $\omega = 0,8 \omega_0$;
Третий член бригады	а) $\omega = 0,1 \omega_0$, б) $\omega = 10 \omega_0$.

Амплитуду ЭДС примите равной $E_m = 1$ В.

Литература

1. *Калашиников С.Г.* Электричество. - М.: Наука, 1985. - §§ 217 - 223.

2. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Электричество и магнетизм. - М.: Астрель, 2001. - §§ 13.4; 13.5.

3. *Иродов И.Е.* Электромагнетизм. Основные законы. - М.-СПб.: Физматлит, 2001. - § 11.3.