

## Лабораторная работа № 8

### Вынужденные колебания в последовательном колебательном контуре

**Цель работы:** исследование амплитудно-частотной и фазово-частотной зависимостей напряжения на конденсаторе в последовательном колебательном контуре.

**Приборы и оборудование:** катушка, конденсатор, резистор переменного сопротивления, генератор синусоидального напряжения, вольтметр, осциллограф.

**Продолжительность работы:** 4 часа.

#### Теоретическая часть

На рис.1 изображен последовательный колебательный контур.

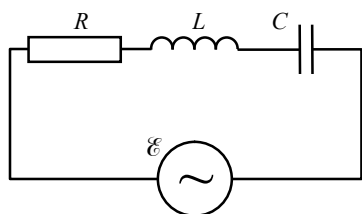


Рис.1. Последовательный колебательный контур

Согласно второму правилу Кирхгофа в любой момент времени алгебраическая сумма напряжений на элементах контура равна внешней ЭДС:

$$u_L + u_R + u_C = \mathcal{E}(t), \quad (1)$$

где  $u_L$ ,  $u_R$ ,  $u_C$  - мгновенные (зависящие от времени) напряжения на катушке, резисторе и конденсаторе, определяемые формулами:

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri, \quad u_C = \frac{1}{C} \int idt, \quad (2)$$

$i = dq / dt$  - сила тока в контуре;  $q = Cu_C$  - заряд конденсатора. Уравнение (1) с учетом (2) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\beta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 \mathcal{E}, \quad (3)$$

где

$$\omega_0^2 = 1 / LC, \quad \beta = R / 2L. \quad (4)$$

Нас будет интересовать случай, когда внешняя ЭДС изменяется по гармоническому закону

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_m \cos \omega t$$

( $\mathcal{E}_m$  и  $\omega$  - амплитуда и частота колебаний ЭДС). Тогда частное решение уравнения (3), описывающее установившиеся колебания напряжения на конденсаторе, имеет вид:

$$u_C = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi), \quad (5)$$

где  $U_{Cm}$  - амплитуда колебаний напряжения  $u_C$ ;  $\varphi$  - фазовый сдвиг (отставание фазы колебаний напряжения на конденсаторе от фазы колебаний ЭДС), определяемые формулами:

$$U_{Cm} = \frac{\mathcal{E}_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Из формулы (5) видно, что напряжение на конденсаторе колеблется с частотой  $\omega$  внешнего воздействия, которое оказывает на контур источник ЭДС  $\mathcal{E}(t)$ . Такие колебания называются вынужденными, а частоту  $\omega$  называют частотой вынужденных колебаний. Амплитуда  $U_{Cm}$  и фаза  $\varphi$  вынужденных колебаний зависят от частоты внешнего воздействия  $\omega$  и параметров контура. Параметры контура  $L$ ,  $C$  и  $R$  входят в формулы (6), (7) через величины  $\omega_0$  и  $\beta$ . Величина  $\omega_0$  представляет собой частоту собственных незатухающих колебаний, которые могли бы происходить в контуре в отсутствие внешнего воздействия и затухания, т.е. при  $\mathcal{E}(t) = 0$  и  $R = 0$ , а  $\beta$  - коэффициент затухания собственных колебаний в контуре с активным сопротивлением  $R$ .

Особый интерес представляют зависимости амплитуды  $U_{Cm}$  и фазы  $\varphi$  от частоты внешнего воздействия  $\omega$ . Рассчитанные по формулам (6), (7) графики зависимостей  $U_{Cm}(\omega)$  и  $\varphi_C(\omega)$  в относительных единицах представлены на рис.2 и 3.

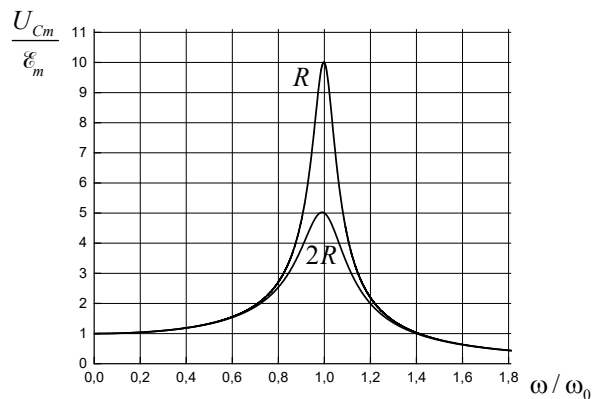


Рис.2. Амплитудно-частотные зависимости напряжения на конденсаторе

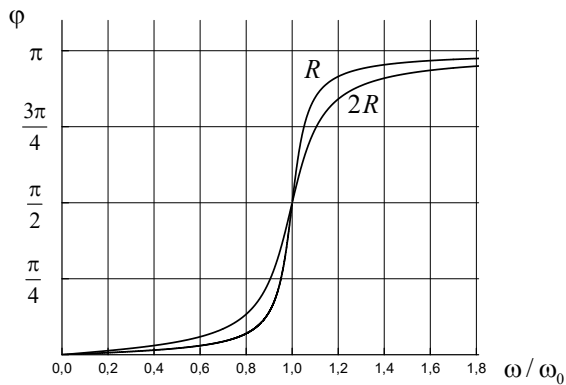


Рис.3. Фазово-частотные зависимости напряжения на конденсаторе

Амплитуда напряжения на конденсаторе достигает резкого максимума (резонанса) при частоте внешней ЭДС  $\omega$  равной

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} . \quad (8)$$

Эту формулу нетрудно получить, исследуя на минимум подкоренное выражение в уравнении (6). Заметим, что резонансная частота в данном случае отличается как от собственной частоты незатухающих колебаний  $\omega_0$ , так и от частоты затухающих колебаний в контуре  $\omega_{\text{зат}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Однако в большинстве практически важных случаев коэффициент затухания мал ( $2\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) и  $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 \approx \omega_{\text{зат}}$ . Амплитуда напряжения на конденсаторе в этом случае (при резонансе) определяется формулой

$$U_{\text{рез}} = U_{Cm}(\omega_{\text{рез}}) \approx \frac{\omega_0}{2\beta} \mathcal{E}_m . \quad (9)$$

Важной характеристикой колебательного контура является добротность

$$Q = \frac{U_{\text{рез}}}{\mathcal{E}_m} , \quad (10)$$

т.е. отношение амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе  $U_{\text{рез}} = U_{Cm}(\omega_{\text{рез}})$  к амплитуде внешней ЭДС. При слабом затухании ( $2\beta^2 \ll \omega_0^2$ )

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} . \quad (11)$$

При низких частотах, когда  $\omega \ll \omega_0$  и  $\omega \ll \omega_0^2 / 2\beta$ , из формулы (6) следует

$$U_{Cm} \approx \mathcal{E}_m \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \approx \mathcal{E}_m . \quad (12)$$

Этот результат физически понятен: при низких частотах сопротивление конденсатора велико, и на нем падает практически все приложенное к контуру напряжение. Из формулы (12) следует, что, если, например, частота колебаний в 10 раз меньше резонансной, то при слабом затухании амплитуда напряжения на конденсаторе отличается от  $\mathcal{E}_m$  примерно на 1 %.

## Описание эксперимента

Схема установки представлена на рис.4. Источником внешней ЭДС является генератор звуковой частоты. В контур последовательно включены резистор  $R1$  переменного сопротивления, катушка индуктивности и конденсатор. Активное сопротивление  $R$  контура определяется суммой сопротивления катушки (ее активного сопротивления, измеренного на постоянном токе), резистора  $R1$  и выходного сопротивления генератора. Эффективное значение напряжения на конденсаторе  $U_C = U_{Cm} / \sqrt{2}$  измеряется вольтметром  $V_C$ .

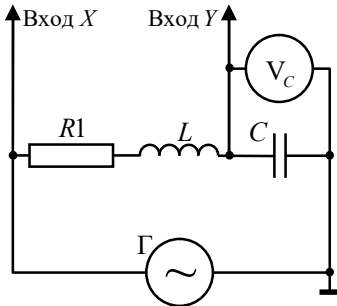


Рис.4. Электрическая схема установки

Измерение фазового сдвига между напряжением на выходе генератора и напряжением на конденсаторе проводится с помощью фигур Лиссажу. Для этого напряжения с конденсатора и выхода генератора подаются на входы  $Y$  и  $X$  осциллографа:

$$U_Y = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi),$$

$$U_X = U_m \cos \omega t.$$

Смещения луча осциллографа по  $X$  и  $Y$  пропорциональны подаваемым сигналам:

$$Y = B \cos(\omega t - \varphi), \quad X = A \cos \omega t. \quad (13)$$

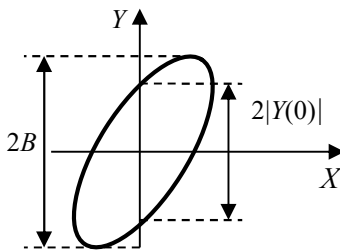


Рис.5. Фигура Лиссажу

Уравнения (13) задают в параметрическом виде эллипс (рис.5). При  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  эллипс переходит в отрезок прямой, при  $A = B$  и  $\varphi = \pm\pi/2$  - в окружность. Обозначим через  $|Y(0)|$  модуль значения  $Y$  при  $X = 0$ . Из выражений (13) следует, что  $X = 0$  при  $\omega t = \pm\pi/2$ , и тогда

$Y = Y(0) = B \cos(\pm\pi/2 - \varphi) = \pm B \sin \varphi$ . Поэтому

$$|\sin \varphi| = \frac{|Y(0)|}{B}. \quad (14)$$

В эксперименте для повышения точности определения  $\varphi$  рекомендуется измерять величины  $2|Y(0)|$  и  $2B$  (см. рис.5) и подставлять их в (14).

### Эксперимент

Запишите в табл.1 известные величины индуктивности  $L$  и емкости  $C$ , а также марки используемых приборов.

Таблица 1

#### Параметры и приборы

$\mathcal{E}_{\text{эфф}} = \dots$ В (определяется инженером или преподавателем)	
<i>Параметры:</i>	<i>Приборы:</i>
$L = (\dots \pm \dots)$ Гн	Генератор ....
$C = (\dots \pm \dots)$ мкФ	Вольтметр ...
	Осциллограф ...

**Упражнение 1.** Определение резонансной частоты, добротности и сопротивления контура.

Установите частоту генератора  $\nu = 100 \dots 200$  Гц. Регулируя выходное напряжение генератора, установите эффективное напряжение на конденсаторе  $U_{C_{\text{эфф}}} = U_{Cm} / \sqrt{2} = (0,5 \dots 2,0)$  В в соответствии с индивидуальным заданием (это напряжение измеряется вольтметром  $V_C$ ). Частота  $\nu$  в данном случае значительно меньше резонансной ( $\nu / \nu_{\text{рез}} < 0,1$ ), поэтому, согласно выражению (12), напряжение на конденсаторе отличается от ЭДС генератора менее чем на 1 %, и можно считать, что  $\mathcal{E}_m = U_{Cm}$  и  $\mathcal{E}_{\text{эфф}} = U_{C_{\text{эфф}}}$ . Эффективное напряжение  $U_{C_{\text{эфф}}}$  на конденсаторе далее для краткости будем обозначать  $U_C$ . Упражнения 1 - 3 выполняются при фиксированном значении ЭДС генератора, поэтому при выполнении этих упражнений не изменяйте положение ручки регулировки выходного напряжения генератора.

Сопротивление переменного резистора  $R_1$  установите равным нулю. Активное сопротивление контура при этом будет равно сумме активного сопротивления катушки и выходного сопротивления генератора.

Изменяя частоту  $\nu$  в диапазоне  $(0,2 \dots 3,0)$  кГц, наблюдайте за изменением напряжения на конденсаторе, определите резонансную частоту  $\nu_{рез}$  и напряжение при резонансе  $U_{рез} = U_C(\nu_{рез})$ . Запишите результаты в соответствующие строки табл.2.

Рассчитайте с помощью формул (10), (11) активное сопротивление контура  $R$ . В последней строке табл.2 запишите расчетную формулу для сопротивления  $R$ , числовое выражение, полученное после подстановки в формулу численных значений, и число, рассчитанное на калькуляторе (см. п. 6 Приложения 2 на с. 105). Так же поступайте при вычислении других величин.

**Таблица 2**

**К упражнению 1**

<b>Упражнение 1. Резонанс. Сопротивление контура</b>	
$R_1 = 0$	
Резонансная частота: $\nu_{рез} = \dots$ Гц	Резонансное напряжения: $U_{рез} = U_C(\nu_{рез}) = \dots$ В
Сопротивление контура: $R = \frac{\epsilon_{эфф}}{U_{рез}} \sqrt{\frac{L}{C}} = \dots \text{ Ом}$	

**Упражнение 2.** Измерение амплитудно-частотной зависимости при  $R_1 = 0$ .

Измерьте зависимость напряжения на конденсаторе  $U_C$  от частоты  $\nu$  в диапазоне  $(0, 2\nu_{рез} \dots 2,0\nu_{рез})$ . Частоты следует выбирать так, чтобы резонансная кривая была «прорисована» достаточно подробно. Для этого шаг по частоте вблизи резонанса должен быть достаточно малым, а вдали от резонанса его можно увеличить. При правильном выборе

шага по частоте обычно достаточно измерить 15 - 20 точек. Результаты измерений запишите в табл.3. Величину  $U_{C\text{теор}}$  можно рассчитать позже при обработке экспериментальных данных.

Таблица 3

К упражнению 2

Упражнение 2. Амплитудно-частотная характеристика при $R_1 = 0$												
$\nu$ , Гц												
$U_C$ , В												
$U_{C\text{теор}}$ , В												

**Упражнение 3.** Измерение амплитудно-частотной зависимости при удвоенном сопротивлении контура.

С помощью резистора  $R_1$  увеличьте сопротивление контура в два раза и вновь измерьте зависимость напряжения на конденсаторе  $U_C$  от частоты  $\nu$  в диапазоне  $(0, 2\nu_{\text{рез}} \dots 2, 0\nu_{\text{рез}})$ . Результаты измерений занесите в таблицу, как и в упражнении 2. В первой строке таблицы напишите «Упражнение 3. Амплитудно-частотная характеристика при  $R_1 = \dots$  Ом». Величину  $U_{C\text{теор}}$  можно рассчитать позже при обработке экспериментальных данных.

**Упражнение 4.** Исследование фазово-частотной зависимости.

Для измерения разности фаз напряжения с конденсатора и выхода генератора подаются на входы  $Y$  и  $X$  осциллографа. Размеры эллипса на экране можно изменять, регулируя выходное напряжение генератора и чувствительность осциллографа.

Установите сопротивление  $R_1 = 0$ . Измерьте фазовый сдвиг для нескольких значений частоты в диапазоне  $(0,6\nu_{\text{рез}} \dots 1,4\nu_{\text{рез}})$ . Для этого в соответствии с рис.5, измерьте с помощью осциллографа величины  $2B$  и  $2|Y(0)|$  и результаты запишите в табл.4.



## К упражнению 4

Упражнение 4. Фазово-частотная характеристика при $R_1 = 0$							
$\nu$ , Гц							
$2 Y(0) $ , дел.							
$2B$ , дел.							
$\varphi$ , рад							

Фазовый сдвиг  $\varphi$  можно рассчитать позже при обработке экспериментальных данных. Убедитесь, что при резонансной частоте фазовый сдвиг  $\varphi \approx \pi/2$ , при частоте значительно меньшей резонансной  $\varphi \rightarrow 0$ , а при высоких частотах  $\varphi \rightarrow \pi$ .

## Обработка экспериментальных данных

1. По результатам измерений в упражнении 1 рассчитайте приборные погрешности напряжений  $\delta \mathcal{E}_{\text{эфф}}$ ,  $\Delta \mathcal{E}_{\text{эфф}}$ ,  $\delta U_{\text{рез}}$ ,  $\Delta U_{\text{рез}}$ .

2. Рассчитайте добротность  $Q$  и ее погрешности  $\delta Q$ ,  $\Delta Q$ , вычислите погрешности сопротивления контура  $\delta R$ ,  $\Delta R$ . Рассчитайте коэффициент затухания  $\beta$ , собственную частоту  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , частоту  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ , погрешности  $\delta \nu_0$  и  $\Delta \nu_0$ , резонансную частоту  $\nu_{\text{рез}} = \omega_{\text{рез}}/2\pi = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}/2\pi$ . Принимая, что  $\delta \nu_{\text{рез}} \approx \delta \nu_0$ , вычислите абсолютную погрешность  $\Delta \nu_{\text{рез}}$ . Для каждой величины в рабочей тетради запишите формулу, числовое выражение, результат вычислений и размерность. Основные результаты измерений и расчетов запишите в табл.5.

## К упражнению 1

Результаты упражнения 1
$\nu_{рез} = (... \pm ...) \text{ кГц}$ (эксперимент)
$\nu_{рез} = (... \pm ...) \text{ кГц}$ (расчет)
$Q = (... \pm ...)$
$R = (... \pm ...) \text{ Ом}$

3. По результатам измерений в упражнении 2 постройте график зависимости напряжения  $U_C$  от частоты  $\nu$ . С помощью формулы (6) рассчитайте  $U_{Cтеор}$ , запишите результаты в табл.3 и нанесите эти точки на график. Заметим, что формула (6) справедлива не только для максимальных значений напряжения и ЭДС, но и для их эффективных значений  $U_C = U_{Cm} / \sqrt{2}$ ,  $\mathcal{E}_{эф} = \mathcal{E}_m / \sqrt{2}$ . При вычислении  $U_{Cтеор}$  по формуле (6) рекомендуем использовать любую доступную компьютерную программу численного анализа функций и построения графиков, например, yotx.ru, excel, matlab, maple.

4. На том же листе постройте график амплитудной характеристики  $U_C(\nu)$ , измеренной в упражнении 3 при удвоенном сопротивлении контура, а также график, рассчитанный с помощью формулы (6). График (размером примерно с тетрадный лист) вклейте в тетрадь. Поля погрешности можно не наносить.

5. Используя результаты измерений в упражнении 4, рассчитайте фазовый сдвиг  $\varphi$  по формуле

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2|Y(0)|}{2B}\right),$$

если большая полуось эллипса лежит в первом и третьем квадрантах; и по формуле

$$\varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{2|Y(0)|}{2B}\right),$$

если большая полуось эллипса лежит во втором и четвертом квадрантах.

Постройте график зависимости  $\varphi$  от частоты  $\nu$ . График (размером примерно с тетрадный лист) вклейте в тетрадь. Поля погрешности можно не наносить.

Сформулируйте выводы по работе, укажите формулы, проверенные экспериментально.

### Подготовка к работе

1. Физические понятия, величины, законы, соотношения, знание которых необходимо для успешного выполнения работы:

- вынужденные колебания, переменный ток, амплитуда, частота, циклическая частота, период колебаний;

- эффективные значения переменного тока и напряжения;

- реактивное сопротивление, активное сопротивление;

- явление резонанса, добротность колебательного контура.

2. Приведите в рабочей тетради вывод формул (6) - (11), (14), электрическую схему установки.

3. При подготовке к работе рекомендуем изучить Приложение 4 на с. 125.

#### Расчетное задание.

1. Рассчитайте частоты  $\omega_0$ ,  $\omega_{рез}$ ,  $\nu_{рез}$  для колебательного контура со следующими параметрами:  $L = 100$  мГн,  $R = 100$  Ом,  $C = (10 \cdot N)$  нФ, где  $N$  - номер бригады.

2. Рассчитайте амплитуду напряжения на конденсаторе  $U_{Cm}$  и фазовый сдвиг  $\varphi_C$  при частотах:

Первый (по алфавиту) член бригады	а) $\omega = \omega_{рез}$ , б) $\omega = 1,2 \omega_{рез}$
Второй член бригады	а) $\omega = \omega_0$ , б) $\omega = 0,8 \omega_0$
Третий член бригады	а) $\omega = 0,1 \omega_0$ , б) $\omega = 10 \omega_0$

Амплитуду ЭДС примите равной  $\mathcal{E}_m = 1$  В.

### Литература

**Иродов И.Е.** Электромагнетизм. Основные законы. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. - 319 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/94160> (дата обращения 21 июня 2019). §§ 11.1 - 11.4.