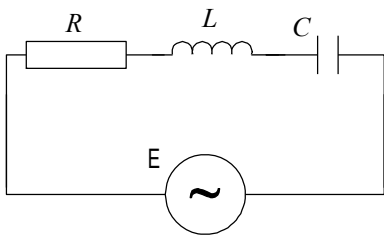


## Вынужденные колебания в последовательном колебательном контуре

**Цель работы:** исследование амплитудно-частотной и фазово-частотной зависимостей напряжения на конденсаторе в последовательном колебательном контуре.

**Приборы и оборудование:** катушка, конденсатор, резистор переменного сопротивления, генератор синусоидального напряжения, цифровой вольтметр, электронный осциллограф.

### Теоретическая часть



На рис.1 изображен последовательный колебательный контур. Согласно второму правилу Кирхгофа в любой момент времени алгебраическая сумма напряжений на элементах контура равна внешней ЭДС:

Рис.1. Последовательный колебательный контур

$$u_L + u_R + u_C = \mathcal{E}. \quad (1)$$

Здесь

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt - \quad (2)$$

мгновенные (зависящие от времени) напряжения на катушке, резисторе и конденсаторе;  $i = dq/dt$  - сила тока в контуре;  $q$  - заряд конденсатора. Уравнение (1) с учетом (2) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\beta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 \mathcal{E}, \quad (3)$$

где

$$\omega_0^2 = 1/LC, \quad \beta = R/2L. \quad (4)$$

Нас будет интересовать случай, когда внешняя ЭДС меняется по гармоническому закону

$$e = e_m \cos \omega t$$

( $e_m$  и  $\omega$  - амплитуда и частота колебаний ЭДС). Тогда частное решение уравнения (3), описывающее установившиеся колебания напряжения на конденсаторе, имеет вид:

$$u_C = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi_C), \quad (5)$$

где

$$U_{Cm} = \frac{e_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \quad (6)$$

амплитуда колебаний напряжения  $u_C$ ;  $\varphi_C$  - фазовый сдвиг,

$$\operatorname{tg} \varphi_C = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Из формулы (5) видно, что напряжение на конденсаторе колеблется с частотой внешнего воздействия  $\omega$ , которое оказывает на контур источник ЭДС  $e$ . Такие колебания называют вынужденными, а частоту  $\omega$  называют частотой вынужденных колебаний. Амплитуда  $U_{Cm}$  и фаза  $\varphi_C$  вынужденных колебаний зависят от частоты внешнего воздействия  $\omega$  и параметров контура. Параметры контура ( $L$ ,  $C$  и  $R$ ) входят в формулы (6), (7) через величины  $\omega_0$  и  $\beta$ . Величина  $\omega_0$  представляет собой частоту собственных незатухающих колебаний, которые могли бы происходить в контуре в отсутствие внешнего воздействия и затухания, т.е. при  $e = 0$  и  $R = 0$ , а  $\beta$  - коэффициент затухания собственных колебаний в контуре с активным сопротивлением  $R$ .

Особый интерес представляют зависимости амплитуды  $U_{Cm}$  и фазы  $\varphi_C$  от частоты внешнего воздействия  $\omega$ . Рассчитанные по форму-

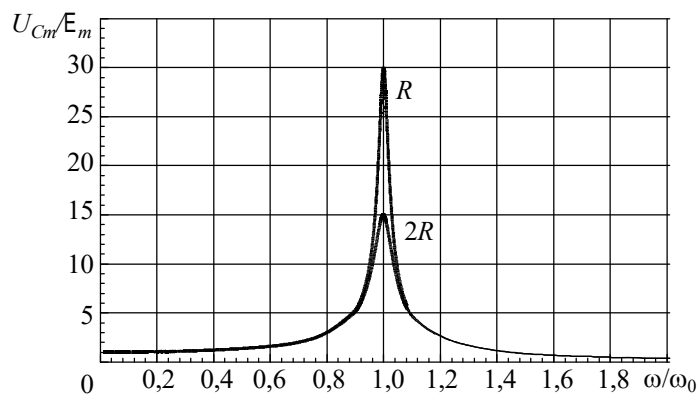


Рис.2. Амплитудно-частотные зависимости напряжения на конденсаторе

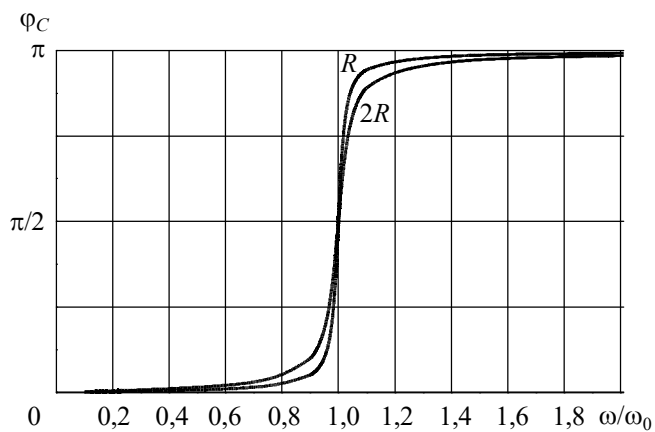


Рис.3. Фазово-частотные зависимости напряжения на конденсаторе

лам (6), (7) графики зависимостей  $U_{Cm}(\omega)$  и  $\varphi_C(\omega)$  в относительных единицах представлены на рис.2 и 3.

Амплитуда напряжения на конденсаторе достигает резкого максимума (резонанса) при частоте внешней ЭДС  $\omega$  равной

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} . \quad (8)$$

Эту формулу нетрудно получить, исследуя на минимум подкоренное выражение в (6). Заметим, что резонансная частота в данном случае отличается как от собственной частоты незатухающих колебаний  $\omega_0$ , так и от частоты затухающих колебаний в контуре  $\omega_{\text{зат}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Однако в большинстве практически важных случаев коэффициент затухания мал ( $2\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) и  $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 \approx \omega_{\text{зат}}$ . Амплитуда напряжения на конденсаторе в этом случае (при резонансе) определяется формулой

$$U_{Cm}(\omega_{\text{рез}}) \approx \frac{\omega_0}{2\beta} \mathcal{U}_m. \quad (9)$$

Важной характеристикой колебательного контура является добротность

$$Q = \frac{U_{Cm}(\omega_{\text{рез}})}{\mathcal{U}_m}, \quad (10)$$

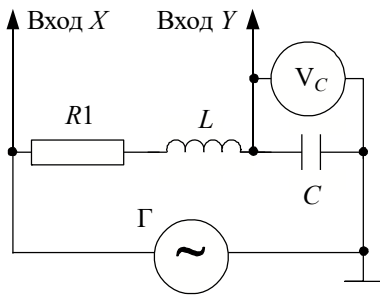
т.е. отношение амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе  $U_{Cm}(\omega_{\text{рез}})$  к амплитуде внешней ЭДС. При слабом затухании ( $2\beta^2 \ll \omega_0^2$ )

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11)$$

При низких частотах, когда  $\omega \ll \omega_0$  и  $\omega \ll \omega_0^2 / 2\beta$ , из формулы (6) следует

$$U_{Cm} \approx \mathcal{U}_m \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \approx \mathcal{U}_m. \quad (12)$$

Этот результат физически понятен: при низких частотах сопротивление конденсатора велико и на нем падает практически все приложенное к контуру напряжение. Из формулы (12) следует, что, если, например, частота колебаний в 10 раз меньше резонансной, то при слабом затухании амплитуда напряжения на конденсаторе отличается от  $\mathcal{U}_m$  примерно на 1%.



### Описание эксперимента

Схема установки представлена на рис.4. Источником внешней ЭДС является генератор звуковой частоты. В контур последовательно включены резистор  $R1$  переменного сопротивления, катушка индуктивности и конденсатор. Активное сопротивление контура

Рис.4. Электрическая схема установки

$R$  определяется суммой сопротивления катушки (ее активного сопротивления, измеренного на постоянном токе), резистора  $R1$  и выходного сопротивления генератора. Эффективное значение напряжения на конденсаторе  $U_C = U_{Cm} / \sqrt{2}$  измеряется вольт-метром  $V_C$ .

Измерение фазового сдвига между напряжением на выходе генератора и напряжением на конденсаторе проводится с помощью фигур Лиссажу. Для этого напряжения с конденсатора и выхода генератора подаются на входы  $Y$  и  $X$  осциллографа:

$$U_Y = U_{Cm} \cos(\omega t - \varphi_C), \quad U_X = U_m \cos \omega t .$$

Смещения луча осциллографа по  $X$  и  $Y$  пропорциональны подаваемым сигналам:

$$Y = B \cos(\omega t - \varphi_C), \quad X = A \cos \omega t . \quad (13)$$

Уравнения (13) задают в параметрическом виде эллипс (рис.5). При  $\varphi_C = \pm\pi$  эллипс переходит в отрезок прямой, при  $A = B$  и  $\varphi_C = \pm\pi/2$  - в окружность.

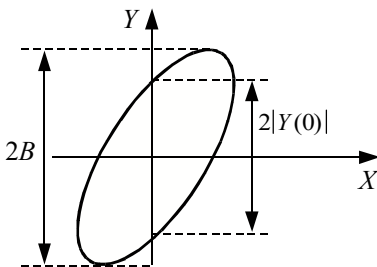


Рис.5. Фигура Лиссажу

Обозначим через  $|Y(0)|$  модуль значения  $Y$  при  $X = 0$ . Из (13) следует, что

$$|\sin \varphi_C| = \frac{|Y(0)|}{B} . \quad (14)$$

В эксперименте для повышения

точности определения  $\varphi_C$  рекомендуется измерять (в делениях) и подставлять в (14) величины  $2|Y(0)|$  и  $2B$  (см. рис.5).

## Выполнение работы

**Упражнение 1.** Исследование амплитудно-частотной зависимости.

1. Установите частоту генератора  $\nu = 100 \dots 200$  Гц. Регулируя выходное напряжение генератора, установите напряжение на конденсаторе  $U_C = 1$  В (измеряется вольтметром  $V_C$ ). Частота  $\nu$  в данном случае значительно меньше резонансной ( $\nu / \nu_{\text{рез}} < 0,1$ ). Поэтому согласно (12) напряжение на конденсаторе отличается от ЭДС генератора менее чем на 1% и можно считать  $\varphi_m = U_{Cm}$ . Далее при выполнении данного упражнения ЭДС генератора не меняйте - эффективное значение ЭДС  $\varphi_{\text{эфф}} = \varphi_m / \sqrt{2}$  будет оставаться равным установленному значению  $U_C = 1$  В при низкой частоте.

2. Сопротивление переменного резистора  $R1$  установите равным нулю. Активное сопротивление контура при этом будет равно сумме активного сопротивления катушки и выходного сопротивления генератора. Изменяя частоту  $\nu$  в диапазоне (0,2...5) кГц, наблюдайте за изменением напряжения на конденсаторе, определите резонансную частоту  $\nu_{\text{рез}}$  и напряжение при резонансе  $U_C(\nu_{\text{рез}})$ . Рассчитайте по формуле (10) добротность контура  $Q$ , а затем при помощи формулы (11) - активное сопротивление контура  $R$  (значения индуктивности и емкости контура указаны на стенде).

3. Используя (4), (8), определите теоретические значения  $\nu_0 = \omega_0 / 2\pi$  и  $\nu_{\text{рез}} = \omega_{\text{рез}} / 2\pi$ , сравните их с экспериментальным значением резонансной частоты. Основные результаты измерений и расчетов сведите в таблицу:

Измерено	$\nu_{\text{рез}}, \text{ кГц}$	Величина $\pm$ погрешность
Измерено	$U_C(\nu_{\text{рез}}), \text{ В}$	Величина $\pm$ погрешность
Рассчитано	$Q$	Величина $\pm$ погрешность

Рассчитано	$R, \text{ Ом}$	Величина $\pm$ погрешность
Рассчитано	$\nu_0, \text{ кГц}$	Величина $\pm$ погрешность
Рассчитано	$\nu_{\text{рез}}, \text{ кГц}$	Величина $\pm$ погрешность

4. Измерьте зависимость напряжения на конденсаторе  $U_C$  от частоты  $\nu$  и постройте график этой зависимости. Число точек следует выбрать таким, чтобы резонансная кривая была "прорисована" достаточно подробно. На график нанесите также несколько точек, рассчитанных по формуле (6).

5. При помощи резистора  $R1$  увеличьте сопротивление контура вдвое, измерьте зависимость  $U_C$  от  $\nu$  и постройте на графике вторую резонансную кривую.

6. Сформулируйте и запишите в рабочую тетрадь выводы по данному упражнению.

**Упражнение 2.** Исследование фазово-частотной зависимости.

Для измерения разности фаз напряжения с конденсатора и выхода генератора подаются на входы  $Y$  и  $X$  осциллографа. Размеры эллипса на экране можно изменять, регулируя напряжение генератора и чувствительность осциллографа.

Исследование фазово-частотной зависимости  $\varphi_C(\nu)$  проведите при том же сопротивлении контура, что и в п. 5 упражнения 1. Убедитесь, что при резонансной частоте фазовый сдвиг равен  $\pi/2$ , при частоте значительно меньшей резонансной фазовый сдвиг стремится к нулю, а при высоких частотах  $\varphi_C \rightarrow \pi$ . Измерьте фазовый сдвиг для нескольких значений частот в диапазоне  $(0,6 \nu_{\text{рез}} \dots 1,4 \nu_{\text{рез}})$ . Точки нанесите на график. Нанесите на тот же график несколько точек теоретической зависимости  $\varphi_C(\nu)$ , рассчитанной при помощи (7).

**Замечание.** Значение  $\varphi_C$  определяется по одной из следующих формул:

$$\varphi_C = \arcsin\left(\frac{2|Y(0)|}{2B}\right),$$

если большая полуось эллипса лежит в первом и третьем квадрантах;

$$\varphi_C = \pi - \arcsin\left(\frac{2|Y(0)|}{2B}\right),$$

если большая полуось эллипса лежит во втором и четвертом квадрантах.

При наблюдении фигуры Лиссажу на экране осциллографа SAGA и С1-94 считайте, что ось  $X$  направлена влево. Это связано с особенностью конструкции осциллографа.

## Подготовка к работе

1. Физические понятия, величины, законы, соотношения, знание которых необходимо для успешного выполнения работы:

- вынужденные колебания; переменный ток; амплитуда; частота; циклическая частота; период колебаний;

- эффективные значения переменного тока и напряжения;
- реактивное сопротивление; активное сопротивление;
- явление резонанса; добротность колебательного контура.

2. Приведите в рабочей тетради вывод формул (6) - (11), (13), (14), электрическую схему установки.

3. При подготовке к работе рекомендуем изучить Приложение 4 учебно-методического пособия.

### Расчетное задание.

1. Рассчитайте частоты  $\omega_0$ ,  $\omega_{рез}$ ,  $\nu_{рез}$  для колебательного контура со следующими параметрами:  $L = 100$  мГн,  $R = 100$  Ом,  $C = (10 \cdot N)$  нФ, где  $N$  - номер бригады.

2. Рассчитайте амплитуду напряжения на конденсаторе  $U_{Cm}$  и фазовый сдвиг  $\varphi_C$  при частотах:

Первый (по алфавиту) член бригады	а) $\omega = \omega_{рез}$ ,    б) $\omega = 1,2 \omega_{рез}$ ;
Второй член бригады	а) $\omega = \omega_0$ ,    б) $\omega = 0,8 \omega_0$ ;
Третий член бригады	а) $\omega = 0,1 \omega_0$ ,    б) $\omega = 10 \omega_0$ .

Амплитуду ЭДС примите равной  $E_m = 1$  В.

## Литература

1. *Калашиников С.Г.* Электричество. - М.: Наука, 1985. - §§ 217 - 223.



2. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Электричество и магнетизм. - М.: Астрель, 2001. - §§ 13.4; 13.5.

3. *Иродов И.Е.* Электромагнетизм. Основные законы. - М.-СПб.: Физматлит, 2001. - § 11.3.