7. Уравнения Максвелла и электромагнитные волны

7.1. Уравнения Максвелла

До сих пор мы изучали уравнения Максвелла небольшими фрагментами. Теперь пора прибавить последнюю часть и соединить их все воедино. Тогда мы будем иметь полное и точное описание электромагнитных полей, которые могут изменяться со временем произвольным образом.

Вспомним, что мы получили.

	В интегральной форме	В дифференциальной форме
1.	Терема Гаусса для вектора $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$: $$\oint_S \vec{D}d\vec{s} = q_{стор} = \oint_V \rho_{стор}dV$$ Выведено в электростатике из закона Кулона. Экспериментальный факт: справедливо и для переменных полей	$\mathrm{div}\vec{D} = \rho_{стор}$
2.	Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$: $$\oint_S \vec{B}d\vec{s} = 0$$ Выведено для постоянных магнитных полей из закона Био-Савара. Экспериментальный факт: справедливо и для переменных полей	$\mathrm{div}\vec{B} = 0$
3.	Закон электромагнитной индукции: $$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{s}$$ Выведено для постоянных магнитных полей. Экспериментальный факт: справедливо и для переменных полей	$\mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
4.	Теорема о циркуляции вектора $\vec{H} = \vec{B}/\mu\mu_0$ $$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = I = \int_S \vec{j}d\vec{s}$$ Выведено для постоянных полей. **Справедливо для переменных полей???**	$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}$?????

Заметим, что комментарии «выведено для постоянных полей» не во всех случаях подтверждены в нашем курсе соответствующими выкладками. Это относится к уравнениям (2) и (4) и связано с дефицитом времени и определенными техническими (математическими) трудностями, но не с принципиальными проблемами.

Ток смещения

Запишем еще одно важное уравнение электромагнетизма – уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения заряда:

$$\boxed{\oint_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV}.$$

Это уравнение может быть записано и в дифференциальном виде:

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}} \qquad (5)$$

Максвелл заметил, что в уравнении (4) противоречит уравнению (5). Действительно, вычислим дивергенцию правой и левой частей уравнения (4):

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{H}) = \mathrm{div}\vec{j}\ .$$

Но дивергенция ротора любого вектора равна нулю:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{H}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = 0\ .$$

Следовательно, из уравнения (4) следует $\mathrm{div}\vec{j} = 0$, что противоречит закону сохранения заряда в нестационарном случае, когда $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$.

Поскольку сомневаться в законе сохранения заряда (5) не приходится, то приходим к выводу, что обобщение уравнения (4) на нестационарный случай не справедливо. Максвелл предложил добавить в правую часть (4) дополнительное слагаемое, отличное от нуля только при изменяющихся во времени полях. Вместо (4) он записал

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}\ . \qquad (4a)$$

Взяв дивергенцию от этого уравнения, с учетом уравнения (1) получим

$$\mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{D} = -\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

что согласуется с уравнением непрерывности.

Так было угадано четвертое уравнение Максвелла. Многочисленные эксперименты и проверенные следствия уравнения (4) доказали его справедливость. Прямая экспериментальная проверка этого нового закона (магнитоэлектрической индукции), открытого теоретически Максвеллом, весьма затруднительна. Однако следствием открытых Максвеллом законов явилось существование электромагнитных волн, которые действительно были обнаружены экспериментально Генрихом Герцем в 1886 году.

Слагаемое

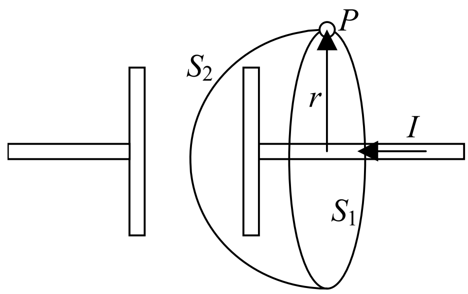
$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{см}}$$

Максвелл назвал плотностью тока смещения, а само уравнение (4) называют теоремой о циркуляции вектора $\vec{H}$ с учетом тока смещения. Теорему можно представить и в интегральном виде

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s} ,$$

где интеграл в левой части называют полным током (ток проводимости + ток смещения через поверхность *S*, ограниченную контуром *L*).

Это уравнение означает, что источниками магнитного поля являются не только токи, но и переменные электрические поля. Теория электромагнетизма стала еще более гармоничной: переменное магнитное поле возбуждает поле электрическое (закон электромагнитной индукции), а переменное электрическое поле возбуждает поле магнитное.



<u>В качестве примера</u> на использование нового уравнения рассмотрим процесс зарядки током *I* конденсатора с пластинами круглой формы. Магнитное поле в некоторой точке *P* можно вычислить, проведя через нее окружность радиусом *r* и воспользовавшись теоремой о циркуляции. Согласно этой теореме

$$H 2\pi r = I_{внутр} ,$$

где $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0$, а $I_{внутр}$ - полный ток, пронизывающий поверхность, натянутую на выбранный контур (окружность). Если в качестве такой поверхности выбрать круг радиуса *r* (поверхность S_1), то ток смещения равен нулю, поскольку вне конденсатора электрическое поле отсутствует, и $I_{внутр} = I$. Следовательно, в точке *P* магнитное поле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} .$$

Теорема о циркуляции должна выполняться для любой поверхности, опирающейся на ту же окружность, в частности, и для поверхности S_2, которую не пронизывает ток проводимости. Если не учитывать ток смещения, то: $I_{внутр} = 0$ и $B = 0$ в точке P, что противоречит полученному выше результату. При учете тока смещения противоречие снимается. Действительно в этом случае:

$$I_{внутр} = S\frac{\partial D}{\partial t} = S\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}, \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{S\varepsilon_0},$$

Следовательно, $I_{внутр} = \dfrac{\partial q}{\partial t} = I$ и вновь получаем $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Уравнения Максвелла

1. Первое уравнение выражает теорему Гаусса, второе уравнение отражает отсутствие в природе магнитных зарядов, третье уравнение - закон электромагнитной индукции, последнее уравнение - теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$, записанная с учетом тока смещения.

2. Уравнения Максвелла показывают, что источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо магнитные поля, меняющиеся во времени. Магнитные же поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

3. Из уравнений Максвелла следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение во времени одного из этих полей приводит к возникновению другого. Поэтому эти поля следует рассматривать как единое электромагнитное поле.

4. Если поля стационарные, то уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{s} = q_{стор} = \oint_V \rho_{стор} dV, \qquad \oint_S \vec{B}d\vec{s} = 0,$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0, \qquad \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{j}d\vec{s}.$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга.

5. Уравнения Максвелла содержат закон сохранения заряда (уравнение непрерывности).

6. Уравнения Максвелла выполняются во всех инерциальных системах отсчета.

7. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это обусловлено тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет магнитных. В нейтральной однородной непроводящей среде уравнения Максвелла приобретают симметричный вид.

$$\oint_S \vec{D}d\vec{s} = 0, \qquad \oint_S \vec{B}d\vec{s} = 0.$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{s}, \qquad \oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}d\vec{s}.$$

8. Рассуждения, с помощью которых мы пришли к уравнениям Максвелла ни в коей мере не могут служить их доказательством. Новые принципы никогда не содержатся в

старой теории и не могут быть выведены из нее логически. В этом смысле нельзя вывести и уравнения Максвелла. На них следует смотреть как на основные аксиомы электродинамики, полученные путем обобщения опытных фактов.

9. Уравнения Максвелла следует дополнить уравнениями, характеризующими среду:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\,, \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{j} = \lambda\vec{E}\,,$$

и уравнением для силы Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{V}, \vec{B}].$$

Полученная система уравнения, дополненная граничными условиями, содержит в себе все основные законы электрического и магнитного полей.

7.3. Электромагнитные волны

Из уравнений Максвелла следует существование принципиально нового физического явления, предсказанного Максвеллом - электромагнитных волн. Согласно теории Максвелла начавшийся в некоторой области процесс изменения электромагнитного поля будет далее непрерывно захватывать все новые области окружающего пространства. Это распространение в пространстве меняющихся во времени электрического и магнитного полей и есть электромагнитная волна.

Ток смещения играет в этом явлении первостепенную роль. Именно его присутствие наряду с законом электромагнитной индукции означает возможность появления электромагнитных волн. Всякое изменение во времени магнитного поля возбуждает поле электрическое. Изменение же поля электрического, в свою очередь, возбуждает поле магнитное. В результате электромагнитное возмущение распространяется в пространстве.

<u>Плоская электромагнитная волна</u>

Наиболее просто математически описывается так называемая плоская волна. В курсе механики мы имели дело с такими волнами.

Рассмотрим однородную непроводящую среду с проницаемостями ε и μ, где

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}\,,\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\ . \tag{1}$$

В данном случае плотности зарядов и токов равны нулю ($\rho = 0$, $j = 0$), и уравнения Максвелла имеют вид

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0\,, \tag{4}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = 0\,. \tag{5}$$

Напомним, что

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

Рассмотрим частное решение этих уравнений, когда все величины зависят только от x и t. Из уравнений Максвелла (2)-(5) в этом случае следует

1.	$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$	$\left(0, -\dfrac{\partial E_z}{\partial x}, \dfrac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\mu\mu_0\left(\dfrac{\partial H_x}{\partial t}, \dfrac{\partial H_y}{\partial t}, \dfrac{\partial H_z}{\partial t}\right)$
2.	$\mathrm{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\left(0, -\dfrac{\partial H_z}{\partial x}, \dfrac{\partial H_y}{\partial x}\right) = \varepsilon\varepsilon_0\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial t}, \dfrac{\partial E_y}{\partial t}, \dfrac{\partial E_z}{\partial t}\right)$
3.	$\mu\mu_0 \mathrm{div}\vec{H} = 0$	$\dfrac{\partial H_x}{\partial x} + 0 + 0 = 0$
4.	$\varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{div}\vec{E} = 0$	$\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + 0 + 0 = 0$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \tag{8}$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \tag{10}$$

Из (6) следует, что проекции H_x и E_x не зависят ни от координаты, ни от времени – это постоянные (статические) поля, которые не влияют на распространение электромагнитного возмущения. Их без потери общности можно принять равными нулю:

$$E_x = 0, \quad H_x = 0.$$

Следовательно, векторы электрического и магнитного поля перпендикулярны оси x. Ось y можно направить вдоль вектора $\vec{E}$. Тогда $E_z = 0$ и из уравнений (7), (10) следует

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0.$$

Это означает, что $H_y = const$, примем ее равной нулю. Оставшиеся уравнения

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{11}$$

продифференцируем первое по *x*, а второе по *t*. Исключая H_z, получим

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \tag{12}$$

где

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}}.$$

Аналогично можно получит уравнение для H_z:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

Таким образом, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны и удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению. Это доказывает, что рассматриваемое возмущение состоит из плоских волн, распространяющихся со скоростью v вдоль оси *x*.

Частным решением уравнения (12) является плоская волна

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где $\frac{\omega}{k} = \mathrm{v}$. Из уравнения (11) при этом следует

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 E_m \omega \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

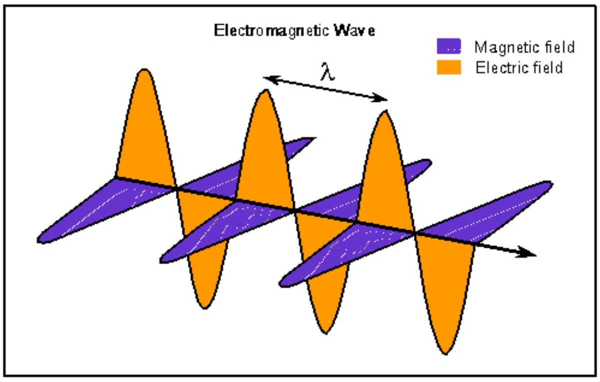
После интегрирования получим

$$H_z = \varepsilon\varepsilon_0 E_m \frac{\omega}{k}\cos(\omega t - kx + \varphi) = H_m \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где $H_m = \varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{v} E_m = \frac{1}{\mu\mu_0 \mathrm{v}} E_m$. Следовательно:

$$E_m = \mathrm{v} B_m$$

Мгновенная "фотография" плоской волны изображена на рисунке.



Таким образом, доказано, что из уравнений Максвелла следует возможность распространения электромагнитных волн. Существенно, что эти волны, в отличие от механических, не требуют для своего распространения какой либо среды. Они могут распространяться и в вакууме, причем в этом случае скорость их распространения равна скорости света.

Теория Максвелла позволила установить и <u>общие свойства электромагнитных</u> волн (не обязательно плоских). Перечислим их:

1. Скорость распространения волны в непроводящей нейтральной среде без ферромагнетиков:
$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad \text{где } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$
2. В случае однородной изотропной среды вдали от зарядов и токов, создающих электромагнитное поле
$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi),$$
$$\vec{B} = \vec{B}_m \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi),$$
где $\vec{k}$ - волновой вектор, перпендикулярный волновой поверхности и указывающий направление распространения волны. Векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{k}$ взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему.
3. Векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ колеблются в одинаковых фазах. Это означает, что $\vec{E}$ и $\vec{B}$ одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т.д.
4. Между мгновенными значениями $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в любой точке существует связь
$$\vec{E} = \left[\vec{B}, v\frac{\vec{k}}{k}\right]$$
а амплитуды векторов связаны простым соотношением: $E_m = vB_m$
5. Электромагнитные волны излучает всякая заряженная частица, движущаяся с ускорением (!). В частности, электромагнитная волна излучается при колебательном движении заряженной частицы.
6. Электромагнитная волна переносит энергию. В вакууме энергия переносится со скоростью света c.

7.4. Энергия электромагнитной волны

Волна переносит энергию. Количественно перенос энергии волнами характеризуется вектором плотности потока энергии $\vec{S}$. Модуль этого вектора равен

$$|\vec{S}| = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t}$$

Плотность потока энергии - энергия, переносимая в единицу времени через площадку единичной площади, ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны. Направлен вектор S также, как и вектор скорости волны $\vec{v}$.

Рассмотрим в поле электромагнитной волны площадку $\Delta s_{\perp}$, ориентированную перпендикулярно скорости волны $\vec{v}$. За малое время Δt через эту площадку волной будет перенесена энергия, сосредоточенная в цилиндре длиной $v\Delta t$:

$$\Delta W = w\mathrm{v}\Delta t \Delta s_{\perp},$$

где w - плотность энергии электромагнитного поля:

$$w = w_{эл} + w_{магн} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Тогда

$$|\vec{S}| = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \Delta t} = w\mathrm{v}.$$

В электромагнитной волне $E = \mathrm{v}B$. Поэтому

$$w_{магн} = \frac{E^2}{2\mu\mu_0 \mathrm{v}^2} = \frac{E^2(\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0)}{2\mu\mu_0} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = w_{эл}.$$

Тогда для плотности потока энергии можно записать

$$\left|\vec{S}\right| = 2w_{эл}\mathrm{v} = \varepsilon\varepsilon_0 E E \mathrm{v} = \varepsilon\varepsilon_0 E B \mathrm{v}^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E H \mu\mu_0 \mathrm{v}^2 = EH,$$

или в векторном виде

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}] \tag{13}$$

Направление вектора плотности потока энергии $\vec{S}$ в изотропной среде совпадает с направлением распространения волны (с направлением вектора $\vec{k}$).

Понятие вектора потока энергии было введено Н.А.Умовым в работах о движении энергии в различных средах, а выражение (3) для электромагнитных волн было получено Пойнтингом. Поэтому вектор потока электромагнитной энергии называют вектором Умова-Пойнтинга или вектором Пойнтинга.

Приведенный вывод формулы (3) не строг, так как мы везде предполагали, что фазовая скорость распространения волн v совпадает со скоростью движения энергии. Это не всегда так. Тем не менее, выражение (3), полученное нами путем нестрогих рассуждений оказывается справедливым для всех случаев.

Исходя из уравнений Максвелла, можно строго доказать следующую важную теорему (теорему Пойнтинга). Выделим внутри произвольной среды некоторый объем V, ограниченный замкнутой поверхностью S. Обозначим через W полную энергию, заключенную внутри выделенного объема. Тогда

$$-\frac{dW}{dt} = \oint_S \vec{S} d\vec{s} \ .$$

Согласно этой теореме изменение энергии в выделенном объеме происходит за счет "вытекания" этой энергии через поверхность, ограничивающую выделенный объем.

7.5. Импульс электромагнитной волны

Максвелл показал, что электромагнитные волны, отражаясь или поглощаясь в тела, оказывают на них давление. Это давление возникает в результате воздействия магнитного поля волны на электрические токи, возбуждаемые электрическим полем той же волны.

Поскольку электромагнитная волна оказывает давление на вещество, последнее приобретает определенный импульс. Но в замкнутой системе, состоящей из вещества и электромагнитной волны, возникло бы нарушение закона сохранения импульса, если бы импульсом обладало только вещество. Следовательно, электромагнитная волна обладает импульсом. Расчет показывает, что

$$\vec{G} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{c^2},$$

где $\vec{G}$ - импульс единицы объема. Для электромагнитной волны в вакууме $S = wc$, поэтому

$$\left|\vec{G}\right| = \frac{w}{c}.$$

Такая же связь между энергией и импульсом присуща (как показывается в теории относительности) частицам с нулевой массой покоя. Это и естественно, поскольку согласно квантовым представлениям электромагнитная волна эквивалентна потоку фотонов - частиц с нулевой массой покоя.