1.10. Общая задача электростатики

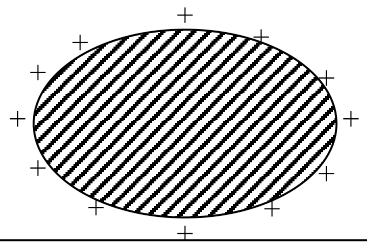
Вектор напряженности электрического поля неподвижного точечного заряда вычисляется по формуле

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{r^3}, \tag{1}$$

Используя принцип суперпозиции, нетрудно вычислить напряженность поля, созданного несколькими точечными зарядами. Если заряды распределены в пространстве непрерывно *по известному закону*, то для вычисления поля необходимо провести суммирование бесконечно малых величин - векторов напряженности, которые создаются бесконечно малыми порциями заряда.

Однако реальные задачи, которые приходится решать в электростатике, гораздо сложнее. Дело в том, что распределение заряда в объеме и на поверхности тел не бывает известным заранее, а само подлежит определению.

Пусть, например, требуется найти напряженность поля уединенного проводника произвольной формы, заряд которого Q. Воспользоваться формулой (1) и принципом суперпозиции для расчета электрического поля напрямую не удается, поскольку не известна поверхностная плотность заряда в различных точках поверхности проводника. Заряд по поверхности распределен неравномерно и только в простейшем случае, когда проводник является шаром, поверхностная плотность заряда одинакова во всех точках поверхности.



1. Полный заряд проводника Q.
2. Неизвестно по какому закону этот заряд распределен по поверхности проводника.
3. Поэтому не удается рассчитать поле, пользуясь принципом суперпозиции и законом Кулона.

Еще более сложной становится задача расчета полей при наличии диэлектриков. В электрическом поле происходит поляризация диэлектриков и наряду со сторонними зарядами необходимо учитывать и связанные (поляризационные заряды). Не рассматривая пока явления, связанные с поляризацией диэлектриков, сформулируем общую задачу электростатики в вакууме следующим образом.

Заданы расположение в пространстве (в вакууме) и форма одного или нескольких проводящих тел. Кроме того, известны заряды или потенциалы этих проводников. Требуется определить напряженность электрического поля во всех точках пространства и распределение заряда по поверхности проводников.

Общий подход к решению этой задачи состоит в следующем. Из теоремы Гаусса и условия потенциальности электростатического поля выводится (см. далее) дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

называемое уравнением Лапласа, которое при определенных граничных условиях на поверхности проводников позволяет в принципе рассчитать потенциал $\varphi(x, y, z)$ в любой точке поля. Если потенциал $\varphi(x, y, z)$ найден, то вектор напряженность электрического поля $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ можно рассчитать по формулам

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{3}$$

Лишь в некоторых случаях удается выразить $\varphi(x, y, z)$ через элементарные функции, а чаще всего для решения уравнения Лапласа приходится привлекать численные методы и компьютерные расчеты.

Еще раз заметим, что уравнения (2), (3) выводятся из теоремы Гаусса и условия потенциальности электростатического поля. Таким образом, значение теоремы Гаусса не ограничивается возможностью решения с ее помощью нескольких частных задач электростатики. И роль потенциала не сводится только к возможности простого расчета с его помощью работы сил поля. *Теорема Гаусса и условие потенциальности электростатического поля приводят к дифференциальному уравнению, на основе которого решаются любые задачи электростатики.*

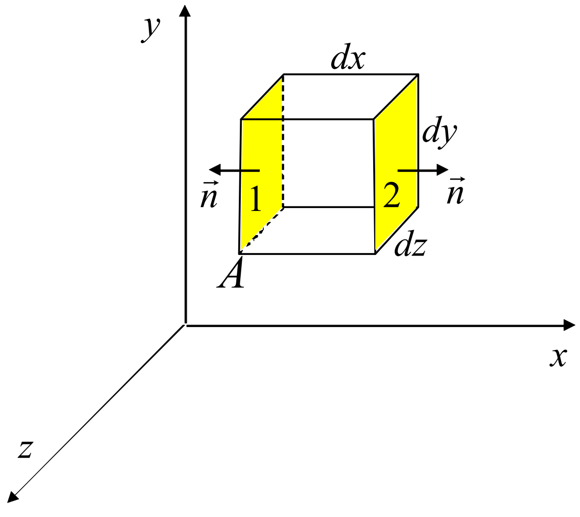
Далее мы сформулируем теорему Гаусса в дифференциальной форме и выведем с ее помощью уравнение Лапласа.

1.11. Теорема Гаусса в дифференциальной форме. Вывод уравнений Пуассона и Лапласа

Пусть электрический заряд распределен в пространстве с объемной плотностью

$$\rho = \frac{dq}{dV}.$$

Рассмотрим в этом пространстве бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами dx, dy, dz, параллельными осям прямоугольной системы координат. Вершина A имеет координаты (x, y, z).



На грани 1 внешняя нормаль направлена против оси x. Поэтому поток вектора напряженности через эту поверхность равен

$$\Phi_1 = -E_x(x)dydz\,.$$

Поток через противоположную грань 2 равен

$$\Phi_2 = E_x(x+dx)dydz\,.$$

Сумма обоих потоков будет

$$\Phi_1 + \Phi_2 = [E_x(x+dx) - E_x(x)]dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dV\,,$$

где $dV = dxdydz$ - объем параллелепипеда. Аналогично можно определить потоки через две пары остальных граней. Полный поток через всю замкнутую поверхность согласно теореме Гаусса равен заряду внутри этой поверхности, деленному на электрическую постоянную:

$$\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV = \frac{\rho dV}{\varepsilon_0}\,.$$

Итак, теорему Гаусса можно записать в дифференциальной форме

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}, \tag{4}$$

где введено обозначение

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\,.$$

Эта величина называется дивергенцией вектора $\vec{E}$. С дивергенцией вектора (не обязательно вектора напряженности) приходится встречаться в самых разных вопросах математики и физики, чем и оправдывается введение этого математического понятия.

Подставляя в (4) $\vec{E} = -grad\varphi$, получим

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,.$$

Получаем

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}. \tag{5}$$

Это уравнение называется уравнением Пуассона. При отсутствии свободных зарядов оно переходит в уравнение Лапласа

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0}. \tag{6}$$

Это уравнение позволяет, по крайней мере, численно, рассчитывать электрической поле произвольной системы заряженных проводников, если заданы их форма, расположение и потенциалы (или заряды).

В теории доказывается, что указанная эта задача имеет единственное решение. Поэтому, если нам каким либо способом удалось найти функцию $\varphi(\vec{r})$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям, то можно утверждать, что это решение правильное и единственное.

Заметим, что дивергенцию и градиент можно представить единым образом через дифференциальный оператор «набла»:

$$\nabla = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_e\frac{\partial}{\partial e} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Так

$grad\varphi = \nabla\varphi$ (произведение вектора «набла» на скаляр φ)

$div\vec{E} = \nabla\vec{E}$ (скалярное произведение вектора «набла» на вектор $\vec{E}$)

1.12. Метод изображений.

Рассмотрим эквипотенциальные поверхности поля двух равных и разноименных зарядов. Одной из таких поверхностей является плоскость симметрии, ее потенциал $\varphi = 0$ (рис.1). Остальные поверхности являются замкнутыми, но не сферическими. Если взять любые две эквипотенциальные поверхности и заполнить их проводником, сохранив значения потенциалов, то поле вне проводников не изменится.

Возьмем в качестве одной эквипотенциальной поверхности плоскость симметрии (ее потенциал равен нулю), а в качестве второй – сферическую поверхность очень малого радиуса, охватывающую заряд q. Мы приходим к выводу, что точечный заряд q, расположенный около бесконечной проводящей плоскости создают такое же поле, как два заряда q и $-q$, расположенные зеркально симметрично относительно плоскости.

Таким образом, мы знаем решение весьма непростой задачи: вблизи бесконечно проводящей плоскости находится заряд q. Этот заряд индуцирует на плоскости заряды противоположного знака. Требуется найти суммарное электрическое поле заряда q и индуцированных зарядов, а также распределение индуцированных зарядов по плоскости.

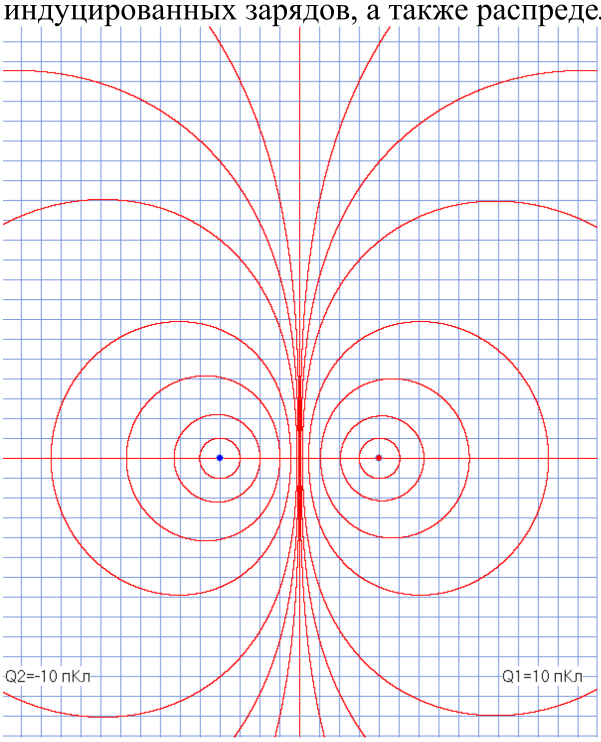


Рис.1

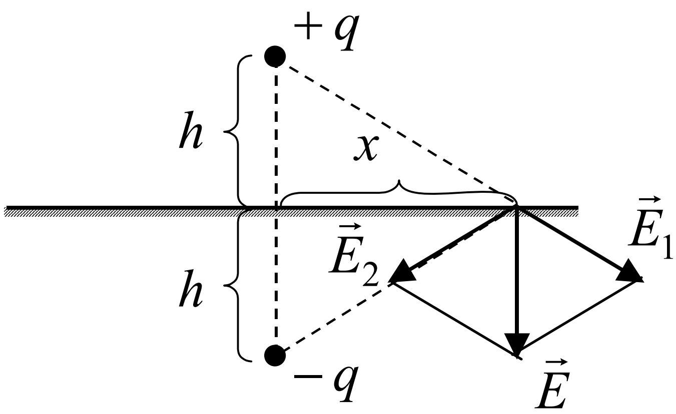


Рис.2

Решение этой задачи нам известно: суммарное поле будет таким же, как суммарное поле заряда q и фиктивного заряда $-q$, расположенного зеркально симметрично относительно проводящей плоскости. Заряд $-q$ по существу «заменяет» все индуцированные заряды. Вблизи проводящей плоскости суммарное поле равно (рис.2)

$$E = \frac{2kqh}{\left(x^2 + h^2\right)^{3/2}}.$$

Теперь можно найти поверхностную плотность заряда:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{qh}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)^{3/2}} .$$

Поверхностная плотность максимальна при $x = 0$ и убывает с ростом x.

Итак, в рассматриваемом случае поле отлично от нуля только в верхнем полупространстве, и для вычисления этого поля достаточно ввести фиктивный заряд-изображение $q' = -q$, поместив его по другую сторону проводящей плоскости на таком же расстоянии, что заряд q. Фиктивный заряд создает в верхнем полупространстве такое же поле, как и индуцированные заряды на плоскости. Именно это подразумевают, когда говорят, что фиктивный заряд заменяет собой «действие» всех индуцированных зарядов. Надо только иметь в виду, что действие фиктивного заряда распространяется лишь на то полупространство, в котором находится действительный заряд q. В другом полупространстве поле отсутствует.