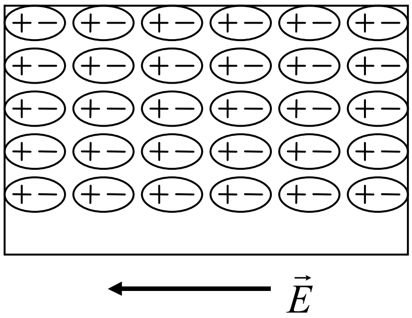
1.13. Поляризация диэлектриков

1. Связанные заряды

Заряды в диэлектрике под действием поля могут смещаться из своих положений равновесия лишь на малые расстояния, порядка атомных. Диэлектрик состоит из электрически нейтральных молекул и под действием приложенного электрического поля «центр тяжести» электронов в молекуле немного смещается относительно «центра тяжести» атомных ядер. Молекулы становятся электрическими диполями, ориентированными в направлении поля $\vec{E}$. В этом случае говорят, что диэлектрик *поляризован*.



Видно, что на одном конце параллелепипеда из диэлектрика выступают нескомпенсированные положительные заряды, а на противоположном конце - отрицательные поверхностные заряды. Их называют *поляризационными* или *связанными* зарядами. Очевидно, что связанные заряды нельзя разделить механически (в отличие от индуцированных зарядов в проводниках).

Заметим, что связанные заряды могут возникать не только на поверхности, но и в объеме диэлектрика.

Механизм поляризации диэлектриков может быть и иным. Существуют диэлектрики, молекулы которых обладают дипольными моментами уже в отсутствие электрического поля. Такие молекулы называются полярными. Если поля нет, то полярные молекулы совершают хаотические тепловые движения и ориентированы совершенно беспорядочно. При наложении электрического поля дипольные молекулы ориентируются преимущественно в направлении поля. Это и означает, что диэлектрик становится поляризованным.

Конечно, приведенный выше рисунок очень упрощенно отображает поляризацию диэлектрика. В действительности тепловые колебания приводят к случайному «разбросу» ориентации отдельных молекул и поляризация сводится к некоторому небольшому упорядочиванию на этом случайном фоне: в направлении поля суммарный дипольный момент молекул несколько больше, чем в иных направлениях.

2. Сторонние заряды

Помимо электрически нейтральных молекул в диэлектрике могут существовать положительно или отрицательно заряженные ионы. Такие заряды называются *сторонними*. Они возникают в диэлектрике, например, при электризации трением. К сторонним зарядам относятся также все заряды, находящиеся на проводниках.

Разделение зарядов на связанные и сторонние очень важно для описания поля в диэлектриках.

3. Трудности расчета поля

Электрическое поле в диэлектрике определяется как сторонними, так и связанными зарядами, причем величина и распределение связанных зарядов изначально не известны, а сами зависят от результирующего электрического поля. Это значительно усложняет расчет поля в диэлектриках. В частности, теорема Гаусса для вектора $\vec{E}$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{s} = \frac{q_{\text{стор}} + q_{\text{связ}}}{\varepsilon_0}$$

содержит в правой части связанный заряд, который сам нуждается в определении. Эти трудности решаются далее путем введения новых величин и установления новых связей.

<u>4. Вектор поляризации</u>

Для количественного описания поляризации вводят в рассмотрение вектор поляризации. Так называется дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}}.$$

Вектор поляризации - локальная характеристика поляризованного диэлектрика (также как, например, объемная плотность заряда - локальная характеристика заряженного тела).

Вектор $\vec{P}$ зависит от напряженности электрического поля $\vec{E}$. Опыт показывает, что для обширного класса диэлектриков и широкого класса явлений связь между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$ линейная. Такая закономерность объясняется тем, что напряженности макроскопических электрических полей обычно малы по сравнению с напряженностями микрополей внутри атомов и молекул. Если среда изотропна, то векторы $\vec{P}$ и $\vec{E}$ коллинеарны и можно записать

$$\boxed{\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}}, \qquad (1)$$

где α - безразмерный коэффициент, *называемый поляризуемостью (диэлектрической восприимчивостью)* диэлектрика. Он зависит от типа диэлектрика.

<u>5. Теорема Гаусса для вектора $\vec{P}$</u>

Поток вектора поляризации $\vec{P}$ через произвольную замкнутую поверхность равен взятому с обратным знаком связанному заряду диэлектрика в объеме, который охватывается поверхностью S, то есть

$$\boxed{\oint_S \vec{P}d\vec{S} = -q_{\text{связ}}}. \qquad (2)$$

Доказательство этой важной теоремы приведем позже.

<u>6. Вектор электрического смещения (вектор $\vec{D}$). Теорема Гаусса для вектора $\vec{D}$</u>

Для расчета поля в диэлектрике введем вспомогательный вектор $\vec{D}$. По определению

$$\boxed{\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}}. \qquad (3)$$

Учитывая, что в изотропном диэлектрике $\vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$, получим

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}}, \qquad (3а)$$

где $\varepsilon = \alpha + 1$ - диэлектрическая проницаемость, зависящая от свойств диэлектрика.

<u>Для вектора $\vec{D}$ справедлива теорема Гаусса</u>

$$\boxed{\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{\text{стор}}}, \qquad (4)$$

где S – произвольная замкнутая поверхность, $q_{\text{стор}}$ - *сторонний* заряд, охватываемый этой поверхностью.

Доказательство: Поток вектора $\vec{D}$ через произвольную замкнутую поверхность равен

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \oint_S \vec{P}d\vec{S} + \varepsilon_0 \oint_S \vec{E}d\vec{S} = -q_{\text{связ}} + \varepsilon_0 \frac{(q_{\text{стор}} + q_{\text{связ}})}{\varepsilon_0} = q_{\text{стор}}.$$

То обстоятельство, что в это уравнение (4) не входят связанные заряды, плотность которых обычно не известна, позволяет использовать это уравнение для определения вектора $\vec{D}$. Вектор напряженности поля затем рассчитывается с использованием формулы (3а). Конкретное исполнение этого алгоритма обычно довольно сложное и требует компьютерных расчетов. Но некоторые задачи решаются просто.

7. Дифференциальные соотношения

При выводе теоремы Гаусса в дифференциальной форме только математическими методами для произвольных вектора $\vec{E}(x,y,z)$ и скаляра $\rho(x,y,z)$ было доказано:

$$\text{Если } \oint_S \vec{E}d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \oint_V (\rho/\varepsilon_0)dV, \qquad \text{то } \operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0.$$

Отсюда следует математическая теорема Гаусса-Остроградского:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{s} = \oint_V \operatorname{div}\vec{E}dV,$$

которая связывает поток произвольного вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S с интегралом от дивергенции этого вектора по объему, ограниченному этой поверхностью.

Пользуясь этой теоремой, получим:

$$\oint_S \vec{P}d\vec{S} = -q_{\text{связ}} = \oint_V -\rho_{\text{связ}}dV \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{div}\vec{P} = -\rho_{\text{связ}}.$$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{\text{стор}} = \oint_V \rho_{\text{стор}}dV \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\text{стор}}.$$

Итак, теоремы Гаусса для векторов $\vec{P}$ и $\vec{D}$ и $\vec{E}$ могут быть представлены в дифференциальном виде:

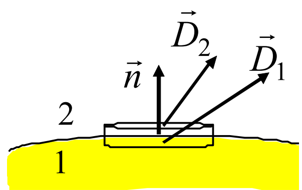
$$\boxed{\operatorname{div}\vec{P} = -\rho_{\text{связ}}}, \tag{5}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\text{стор}}}. \tag{6}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho_{\text{связ}} + \rho_{\text{стор}}}{\varepsilon_0}}. \tag{7}$$

1.14. Условия на границе раздела двух диэлектриков

Найдем условия, которым должны удовлетворять векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на границе раздела двух диэлектриков. Величины, характеризующие поле в первой среде, будем отмечать индексом 1, во второй среде - индексом 2.



Возьмем цилиндр, основания которого расположены по разные стороны от границы раздела. Высота цилиндра бесконечно мала по сравнению с линейными размерами его основания (рис.). Если вблизи границы раздела отсутствуют *сторонние* заряды, то поток вектора $\vec{D}$ через выбранную поверхность равен нулю. Но этот поток можно представить в виде суммы потоков через основания цилиндра и его боковую поверхность. Поток через боковую поверхность бесконечно мал (т.к. высота цилиндра бесконечно мала). Сумма потоков через основания цилиндра равна

$$\Phi_{осн} = (D_{2n} - D_{1n})\Delta S,$$

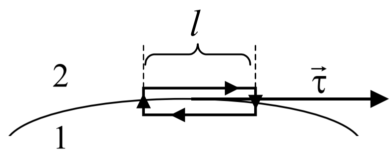
где D_{1n} и D_{2n} проекции векторов $\vec{D}_{1,2}$ на направление нормали к границе раздела. Таким образом, если на границе раздела двух диэлектриков нет сторонних зарядов (связанные заряды могут быть), то

$$D_{2n} - D_{1n} = 0. \qquad (8)$$

Следовательно, нормальная компонента вектора $\vec{D}$ на границе раздела меняется непрерывно. Из выражения (8) следует

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n},$$

то есть нормальная компонента вектора напряженности претерпевает скачок на границе раздела двух диэлектриков в $\varepsilon_2 / \varepsilon_1$ раз.



Рассмотрим теперь изменение на границе раздела касательных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$. Пусть вблизи границы раздела в диэлектрике 1 поле равно $\vec{E}_1$, а в диэлектрике 2 - $\vec{E}_2$. Возьмем небольшой вытянутый прямоугольный контур (рис.). Стороны контура, параллельные границе раздела, достаточно малы, так, что в их пределах поле $\vec{E}$ в каждом диэлектрике практически не изменяется. "Высота" контура считается очень малой. Тогда согласно теореме о циркуляции вектора $\vec{E}$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = E_{2\tau} l \cos 0 + E_{1\tau} l \cos \pi = l(E_{2\tau} - E_{1\tau}) = 0.$$

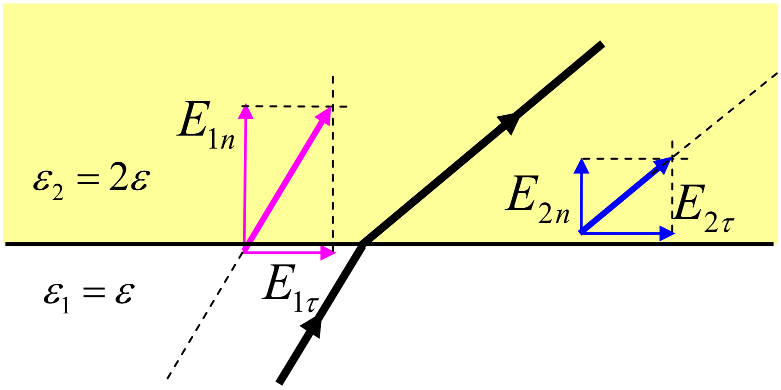
Следовательно,

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}, \qquad (9)$$

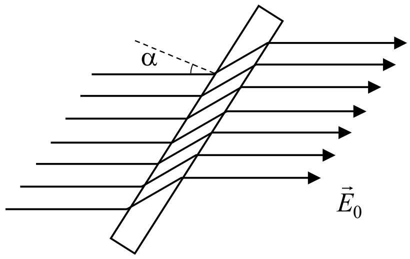
то есть тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ оказывается одинаковой по обе стороны границы раздела (не претерпевает скачка). Из (9) следует

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}.$$

<u>Пример 1.</u> Преломление силовых линий на границе раздела двух диэлектриком с $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$. Построим векторы напряженности в первом и втором диэлектриках вблизи границы раздела, учитывая, что $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$ и $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Силовые линии (линии поля $\vec{E}$) вблизи границы раздела параллельны вектору $\vec{E}_1$ в первом диэлектрике и параллельны вектору $\vec{E}_2$ во втором диэлектрике.



Пример 2. Пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε помещена в однородное электрическое поле так, что ее нормаль составляет угол α с напряженностью этого поля $\vec{E}_0$ (рис.). Найдите модуль E вектора напряженности поля внутри пластины вдали от ее краев.



1.15. Поверхностная и объемная плотность связанного заряда

Можно доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\text{стор}}, & \text{(теорема Гаусса)} \\ \oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 0, & \text{(условие потенциальности электростат. поля)} \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} & \text{(«материальное» уравнение)} \end{cases}$$

и граничные условия для векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ при заданных сторонних зарядах и потенциалах проводников позволяет, по крайней мере, численно рассчитать эти поля.

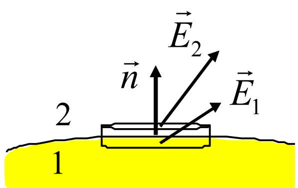
После расчета полей $\vec{E}$ и $\vec{D}$ связанный заряд на поверхности и в объеме диэлектриков можно рассчитать при помощи уравнений:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho_{\text{связ}} + \rho_{\text{стор}}}{\varepsilon_0}, \qquad \operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\text{стор}}, \qquad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}.$$

В частности, при $\varepsilon = const$, получим

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho_{\text{связ}} + \rho_{\text{стор}}}{\varepsilon_0} \\ \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E} = \rho_{\text{стор}} \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{связ}} = -\rho_{\text{стор}}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Для определения поверхностной плотности связанного заряда $\sigma_{\text{связ}}$ воспользуемся теоремой Гаусса для вектора $\vec{E}$, выбирая замкнутую цилиндрическую поверхность, примыкающую к границе раздела (см. рис.). Тогда:



$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma_{\text{связ}} + \sigma_{\text{стор}}}{\varepsilon_0},$$

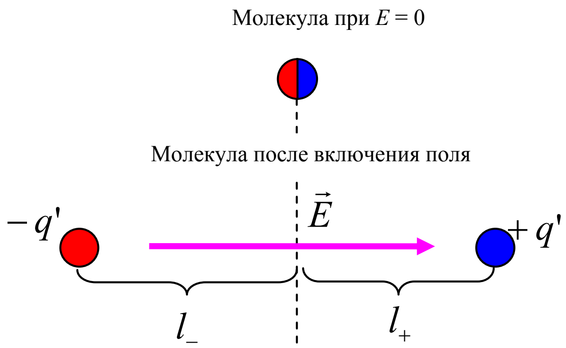
и

$$\sigma_{\text{связ}} = \varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) - \sigma_{\text{стор}}$$

Пример 3. Поле однородно заряженного диэлектрического шара. Известен радиус шара R, диэлектрическая проницаемость ε и объемная плотность стороннего заряда ρ. Необходимо найти поле $E(r)$, поверхностную и объемную плотности связанного заряда $\sigma_{\text{связ}}$ и $\rho_{\text{связ}}$.

1.16. Доказательство теоремы Гаусса для вектора $\vec{P}$

1) Рассмотрим нейтральную неполяризованную молекулу. При включении электрического поля $\vec{E}$ молекула поляризуется. Это можно представить, как смещение некоторого связанного положительного заряда q' в направлении поля $\vec{E}$ на расстояние l_+ и смещение такого же отрицательного заряда $-q'$ на l_- в противоположном направлении. В результате образуется диполь с моментом $|\vec{p}| = q'(l_+ + l_-)$.



Дипольный момент некоторого объема диэлектрика ΔV равен

$$\Delta p = q'(l_+ + l_-)\Delta N,$$

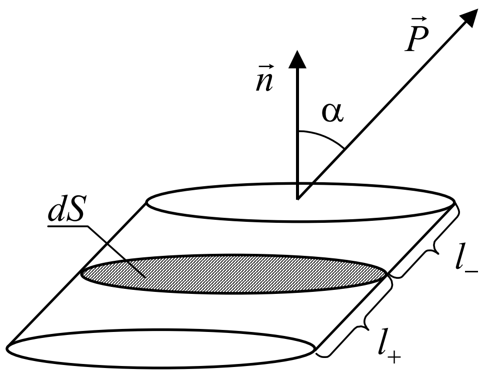
где ΔN - число молекул в этом объеме. Модуль вектора поляризации равен

$$|\vec{P}| = \frac{q'(l_+ + l_-)\Delta N}{\Delta V} = q'n(l_+ + l_-),$$

где n – концентрация молекул.

2) Рассмотрим малую площадку dS внутри диэлектрика. При включении внешнего электрического поля диэлектрик поляризуется – положительные заряды смещаются относительно отрицательных. Найдем заряд, который проходит, через элемент dS в направлении нормали $\vec{n}$ к площадке.

Пусть при включении внешнего поля $\vec{E}$ положительные заряды смещаются вдоль поля (вдоль вектора поляризации) на расстояние l_+, а отрицательные заряды смещаются в противоположном направлении на l_-.



Через элемент поверхности dS в результате поляризации пройдет положительный заряд

$$dq'_+ = q'nl_+dS\cos\alpha,$$

заключенный внутри косого цилиндра. Кроме того, через элемент dS в противоположном направлении пройдет отрицательный заряд величиной

$$|\,dq'_-| = q'nl_-dS\cos\alpha\ .$$

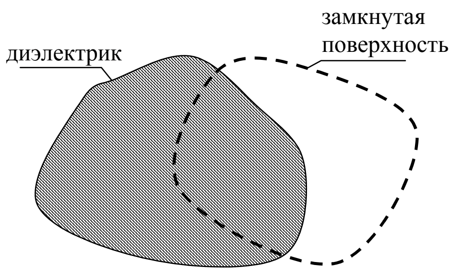
Здесь ρ' - объемная плотность связанного заряда. В результате при поляризации диэлектрика в направлении вектора $\vec{P}$ через площадку dS прошел заряд

$$dq' = (dq'_+ + |\,dq'_-|) = q'n(l_+ + l_-)dS\cos\alpha\ .$$

Но $q'n(l_+ + l_-) = P$. Поэтому при поляризации в направлении нормали через нее пройдет связанный заряд

$$dq' = \vec{P}d\vec{S}\ .$$

3) Рассмотрим теперь произвольную замкнутую поверхность *S*, которая охватывает часть диэлектрика. Пусть $\vec{n}$ внешняя нормаль к поверхности. Когда внешнее поле отсутствует, и диэлектрик не поляризован, суммарный связанный заряд внутри поверхности *S* равен нулю. При включении поля и поляризации диэлектрика через поверхность *S* из заключенного в ней объема выйдет связанный заряд величиной



$$\Delta q' = \oint_S \vec{P}d\vec{S}\ .$$

При этом, очевидно, связанный заряд внутри поверхности *S* станет равным $q' = -\Delta q'$. Следовательно, $\oint_S \vec{P}d\vec{S} = -q'_{\text{внутр}} = -q_{\text{связ}}$. Теорема доказана.