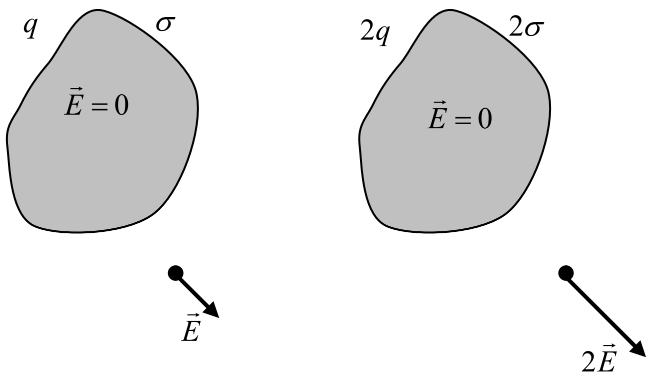
1.17. Емкость проводников и конденсаторов

1. Емкость уединенного проводника. Рассмотрим заряженный уединенный проводник, погруженный в неподвижный диэлектрик. Разность потенциалов между двумя любыми точками проводника равна нулю, поэтому потенциал всех точек проводника один и тот же. Обозначим его φ, и будем называть потенциалом проводника.



1. $q \Rightarrow 2q$
2. $\sigma \Rightarrow 2\sigma$, т.к. только в этом случае сохранится $\vec{E}=0$ в проводнике
3. $\vec{E} \Rightarrow 2\vec{E}$ вне проводника
4. $\varphi \Rightarrow 2\varphi$

Заряд распределяется по поверхности проводника таким образом, что электрическое поле внутри проводника равно нулю. Если увеличить заряд проводника, например в 2 раза, то поверхностная плотность заряда в каждой точке поверхности проводника также увеличится в 2 раза. Только в этом случае напряженность поля внутри проводника останется равной нулю и после увеличения заряда:

если $\vec{E} = \sum \frac{k\sigma_i \Delta s_i}{r_i^3}\vec{r}_i = 0$, то $\vec{E} = \sum \frac{k(2\sigma_i)\Delta s_i}{r_i^3}\vec{r}_i = 0$

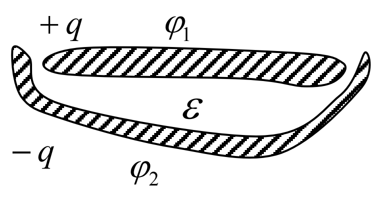
Следовательно, в любой точке вне проводника напряженность поля также увеличится в 2 раза. Значит и потенциал проводника увеличится в 2 раза. Таким образом, между зарядом проводника и его потенциалом существует прямая пропорциональность

$$q = C\varphi .$$

Коэффициент пропорциональности C зависит только от размеров и формы проводника, а также от диэлектрической проницаемости окружающего диэлектрика и его распределения в пространстве. Он *называется емкостью уединенного проводника*. В системе СИ единицей емкости является фарад. Очевидно, 1 Ф = 1 Кл/ 1 В.

Пример. Емкость проводящего шара. ……………………….

2. Емкость конденсатора. Два проводника произвольной формы, разделенные диэлектриком, называют конденсатором.



Проводники, образующие конденсатор, называют обкладками конденсатора. Можно доказать, аналогично тому, как это сделано выше для уединенного проводника, что если заряд одной обкладки конденсатора равен q, а другой (- q) , то разность потенциалов между обкладками пропорциональна величине q.

Емкостью конденсатора называют коэффициент пропорциональности между зарядом конденсатора (так называют заряд его положительной обкладки) и разностью потенциалов обкладок:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}\ .$$

Емкость зависит от геометрических размеров обкладок, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости среды.

3. Сферический конденсатор состоит из двух концентрических проводящих сфер. Пусть радиус внутренней сферы a, заряд q, радиус внешней сферы b, заряд $-q$. пространство между сферами заполнено диэлектриком проницаемости ε. Найдем емкость такого конденсатора.

1) При помощи теоремы Гаусса для вектора $\vec{D}$ найдем поля $\vec{D}$ и $\vec{E}$ в пространстве между обкладками:

$$\oint\limits_S \vec{D}d\vec{s} = 4\pi r^2 D = q \quad \Rightarrow \quad D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

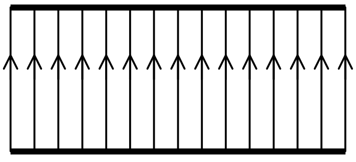
где r - расстояние от центра сфер. Вычислим разность потенциалов между сферами:

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{q dr}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

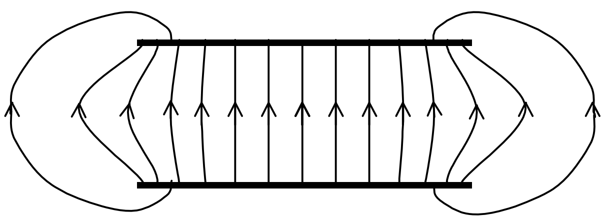
По определению емкость конденсатора равна:

$$C = \frac{q}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 ab}{b - a}.$$

В специальном случае $b \to \infty$ получим формулу для емкости уединенного шара: $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a$.



Поле плоского конденсатора без учета краевых эффектов



Поле плоского конденсатора с учетом краевых эффектов

4. Плоский конденсатор представляет собой две плоские проводящие пластины, расположенные параллельно друг другу на расстоянии d. Это расстояние предполагается малым по сравнению с линейными размерами пластин. Площадь каждой пластины (обкладки конденсатора) равна S, причем заряд одной пластины Q, а другой пластины $-Q$. На некотором расстоянии от краев, между пластинами, поле почти однородно. Если считать его однородным, а распределение зарядов по пластинам равномерным, то для разности потенциалов между пластинами $\varphi_1 - \varphi_2$ можно записать

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} d = \frac{Qd}{S\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Таким образом,

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{1}$$

где величина $C = \varepsilon\varepsilon_0 S / d$ называется емкостью плоского конденсатора. Формула (1) не учитывает неоднородности распределения заряда по поверхностям каждой из пластин. На самом деле поверхностная плотность заряда σ не является постоянной, увеличиваясь вблизи краев пластин, поэтому соотношение $\sigma = Q/S$, использованное при выводе (1), является приближенным. Оно выполняется тем точнее, чем меньше отношение d к линейным размерам пластин конденсатора.

Плоский конденсатор в одну фараду имел бы гигантские размеры. Площадь каждой пластины была бы равна 100 км^2 при расстоянии между ними равном 1 мм.

В 1746 г. профессор Мушенброк в городе Лейдене заряжал воду в бутыли при помощи провода, идущего от горлышка бутыли к электростатической машине. Когда его ассистент, державший бутыль одной рукой, попробовал передвинуть другой рукой провод, он почувствовал сильный удар. Таким образом, простой конденсатор привлек к себе внимание ученых. Открытие "лейденской банки" произвело революцию в опытах с электричеством.

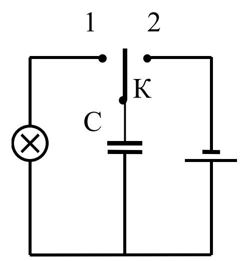
1.18. Соединение конденсаторов

Параллельное соединение конденсаторов…………………

Последовательное соединение конденсаторов……………

1.19. Энергия заряженного конденсатора

Если обкладки заряженного конденсатора замкнуть металлическим проводником, то в нем возникнет электрический ток, а конденсатор разрядится. Электрический ток разряда конденсатора выделяет в проводнике определенное количество теплоты, а это значит, что заряженный конденсатор обладает энергией.



Так, если в схеме на рис. перевести переключатель К в положение 2, то конденсатор С окажется соединенным с источником напряжения и зарядится до некоторого напряжения. При перебрасывании переключателя в положение 1 конденсатор разряжается через электрическую лампочку, которая дает вспышку.

Вычислим энергию заряженного конденсатора. Эта энергия равна работе, которую следует совершить, чтобы зарядить конденсатор. Энергия определяется установившимся зарядом конденсатора, а способ его зарядки на величину энергии не влияет.

Применим такой способ зарядки, чтобы вычисления были максимально просты. Если конденсатор не заряжен, то на каждой из его обкладок имеется смесь одинаковых количеств положительных и отрицательных зарядов. Будем переносить положительное электричество бесконечно малыми порциями dq с отрицательной обкладки на положительную. Для переноса заряда dq необходимо совершить работу против сил электрического поля:

$$\delta A_{внеш} = U dq ,$$

где U - мгновенное значение разности потенциалов между обкладками. Эта работа пойдет на увеличение электрической энергии конденсатора W, то есть

$$dW = U\,dq = \frac{q}{C} dq .$$

Интегрируя это выражение, получим

$$W = \int \frac{q dq}{C} = \frac{q^2}{2C} .$$

Используя формулу $q=C(\varphi_1 - \varphi_2)=CU$, выражение для энергии заряженного конденсатора можно также записать в виде

$$\boxed{W = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2} . \tag{1}$$

Напомним, что U - разность потенциалов (или электрическое напряжение) между обкладками конденсатора. Полученные формулы для энергии справедливы для любого (плоского, сферического, цилиндрического и т.д.) конденсатора.

1.20. Электрическая энергия заряженных проводников

Рассмотрим сначала уединенный заряженный проводник. Его электрическая равна работе, которую нужно совершить, чтобы нанести на проводник данный заряд, медленно перемещая его бесконечно малыми порциями из бесконечности, где изначально эти порции заряда не взаимодействовали. Приращение электрической энергии проводника при перемещении на него из бесконечности малой порции заряда dq равно

$$dW = \delta A_{внеш} = \varphi dq ,$$

где φ - мгновенное значение потенциала проводника (в бесконечно удаленной точке потенциал принят равным нулю). Учитывая, что $\varphi = q / C$, после интегрирования получим

$$W = \int \varphi dq = \int \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} .$$

Можно также записать

$$\boxed{W = \frac{1}{2}q\varphi = \frac{1}{2}C\varphi^2}. \qquad (2)$$

<u>Рассмотрим теперь два заряженных проводника</u>, расположенных в вакууме. Заряды проводников q_1, q_2, потенциалы φ_1, φ_2. Примем за начальное такое состояние, когда проводники не заряжены и будем переносить заряды из бесконечности на проводники бесконечно малыми порциями. Текущие значения зарядов и потенциалов проводников во время такого процесса зарядки будем обозначать Q_1, Q_2 и Φ_1, Φ_2. Тогда для приращения электрической энергии проводников можно записать

$$dW = \Phi_1 dQ_1 + \Phi_2 dQ_2 \ .$$

Для простоты вычислений будем заряжать проводники так, чтобы в любой момент времени текущие заряды проводников были пропорциональны их конечным значениям

$$Q_1 = xq_1, \ \ Q_2 = xq_2,$$

где переменная величина x во время зарядки возрастает от начального значения $x = 0$ до конечного значения $x = 1$. Одновременное изменение зарядов обоих проводников в несколько раз ведет к изменению потенциалов проводников во столько же раз:

$$\Phi_1 = x\varphi_1, \ \Phi_2 = x\varphi_2.$$

Единственной переменной, определяющей при зарядке мгновенные значения зарядов и потенциалов, является переменная x. Ее мы и примем за переменную интегрирования. Очевидно,

$$dQ_1 = q_1 dx, \ \ dQ_2 = q_2 dx,$$

поэтому

$$dW = \varphi_1 q_1 x dx + \varphi_2 q_2 x dx \ .$$

Выполнив интегрирование, получим

$$W = \frac{1}{2}q_1\varphi_{12} + \frac{1}{2}q_2\varphi_2.$$

Эта формула легко обобщается на случай произвольного числа проводников:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i}. \qquad (3)$$

Можно показать, что формула (3) остается справедливой и в том случае, когда пространство между проводниками заполнено неподвижным незаряженным диэлектриком (однородным или неоднородным).

Если сторонние заряды расположены не только на проводниках, но и на диэлектриках, то формула (3) также остается справедливой, если диэлектрики разбить на малые фрагменты, потенциал каждого из которых можно считать постоянным. Тогда суммирование в (3) следует заменить интегрированием, учитывая вклад всех сторонних зарядов, расположенных на поверхностях и в объеме заряженных тел:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho dV + \frac{1}{2}\int_S \varphi\sigma dS} \qquad (3а)$$

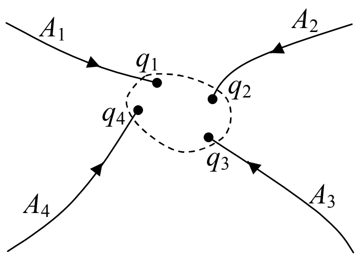
<u>Пример.</u> При помощи формулы (3) вычислим электрическую энергию заряженного конденсатора. Обозначив заряд положительной обкладки q, ее потенциал φ_1, а потенциал отрицательной обкладки φ_2, получим :

$$W = \frac{1}{2}(q\varphi_1 - q\varphi_2) = \frac{1}{2}qU = CU^2/2 = q^2/2C,$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ - напряжение на конденсаторе. Эти формулы согласуются с полученными ранее.

1.21. Энергия взаимодействия точечных зарядов

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов равна работе внешних сил по созданию данной системы (см. рис.1) посредством медленного (квазистатического) перемещения зарядов из бесконечно удаленных друг от друга точек в заданные положения. Эта энергия зависит только от состояния системы, но не от способа, каким система была приведена в это состояние.



$$W_{1234} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Рис.1

Основываясь на таком определении, получим формулу для энергии взаимодействия точечных зарядов. Рассмотрим сначала неподвижный точечный заряд q_1 и бесконечно удаленный от него заряд q_2. Найдем работу внешних сил A_1 по перемещению заряда q_2 из бесконечности в точку, удаленную от заряда q_1 на расстояние r_{12} :

$$A_1 = -q_2(\varphi_\infty - \varphi) = -q_2\left(0 - \frac{kq_1}{r_{12}}\right) = \frac{kq_1q_2}{r_{12}}.$$

Энергия взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов равна

$$\boxed{W_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}}} \qquad (4)$$

Подсчитаем теперь работу внешних сил по перемещению заряда q_3 из бесконечно удаленной точки в точку пространства, удаленную от заряда q_1 на расстояние r_{13}, а от заряда q_2 на расстояние r_{23}:

$$A_2 = -q_3\left(0 - \frac{kq_1}{r_{13}} - \frac{kq_2}{r_{23}}\right) = q_3\left(\frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}}\right).$$

Таким образом, энергия взаимодействия трех точечных зарядов определяется формулой

$$\boxed{W = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}}. \qquad (5)$$

Эта формула легко допускает обобщение на случай произвольного числа точечных зарядов

$$W_{\text{вз}} = W_{12} + W_{13} + ... + W_{23} + ... = \sum_{i<j} W_{ij} \ . \qquad (6)$$

Например, для системы из 4-х зарядов эта формула содержит 6 слагаемых.

Собственная электрическая энергия и энергия взаимодействия

Рассмотрим электрическую энергию двух проводящих шаров, радиусы которых R_1, R_2, а заряды q_1, q_2. Будем считать, что шары расположены в вакууме на большом по сравнению с их радиусами расстоянии l друг от друга. В этом случае расстояние от центра одного шара до любой точки поверхности другого примерно равно l и потенциалы шаров можно выразить формулами:

$$\varphi_1 \approx \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}, \quad \varphi_2 \approx \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

Электрическую энергию системы найдем при помощи (3):

$$W = \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

Первое слагаемое в полученной формуле – энергия взаимодействия зарядов, расположенных на первом шаре. Эту энергию называют собственной электрической энергией (первого шара). Аналогично, второе слагаемое – собственная электрическая энергия второго шара. Последнее слагаемое – энергия взаимодействия зарядов первого шара с зарядами второго.

При $l >> R_1, R_2$ электрическая энергия взаимодействия существенно меньше суммы собственных энергий шаров, однако при изменении расстояния между шарами собственные энергии остаются практически постоянными и изменение полной электрической энергии примерно равно изменению энергии взаимодействия. Этот вывод справедлив не только для проводящих шаров, но и для заряженных тел произвольной формы, расположенных на <u>большом расстоянии</u> друг от друга: приращение электрической энергии системы равно приращению энергии взаимодействия заряженных тел системы: $\Delta W = \Delta W_{\text{вз}}$. Энергия взаимодействия $W_{\text{вз}}$ удаленных друг от друга тел не зависит от их формы и определяется формулой (4).

При выводе формул (4)-(6) каждый из точечных зарядов рассматривался как нечто целое и неизменное. Учитывалась только работа, затрачиваемая на сближение таких неизменных зарядов, но не на их образование. Напротив, при выводе формулы (3) учитывалась также работа, затрачиваемая на нанесение зарядов q_i на каждое из тел системы путем переноса электричества бесконечно малыми порциями из бесконечно удаленных точек. Поэтому формула (3) определяют полную электрическую энергию системы зарядов, а формула (6) только электрическую энергию взаимодействия точечных зарядов.

1.22. Плотность энергии электрического поля. Локализация энергии в пространстве.

Рассмотрим плоский конденсатор. Его энергию выразим через напряженность электрического поля в конденсаторе:

$$E = \frac{U}{d},\ C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SE^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} Sd$$

Но $Sd = V$ - объем конденсатора. Поэтому величина

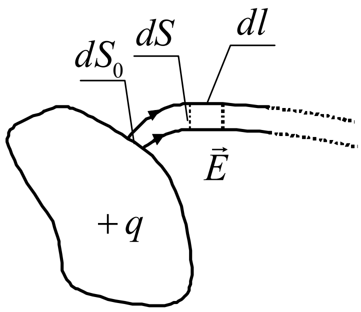
$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} \qquad (7)$$

представляет собой энергию, приходящуюся на единицу объема электрического поля. Ее называют плотностью энергии электрического поля.

Можно показать, что формула (7), полученная для плоского конденсатора, справедлива и для произвольных электрических полей, она определяет энергию, приходящуюся на единицу объема. Полная электрическая энергия может быть вычислена интегрированием по всему занимаемому электрическим полем объему:

$$\boxed{W = \int w dV = \int \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} dV}. \qquad (8)$$

Продемонстрируем вывод формул (7), (8) на примере уединенного заряженного проводника, который погружен в изотропный незаряженный диэлектрик.



Разделим поверхность проводника на элементарные площадки dS_0 и через их границы проведем силовые линии. Пространство разобьется на силовые трубки, одна из которых изображена на рисунке. Поверхностная плотность σ заряда и нормальная компонента вектора $\vec{D}$ на поверхности проводника связаны соотношением

$$D_n = \sigma,$$

которое легко получить при помощи теоремы Гаусса для вектора $\vec{D}$. Заряд на проводнике представим интегралом

$$q = \int \sigma dS_0 = \int D_n dS_0 .$$

Внутри трубки сторонних зарядов нет, а поток вектора $\vec{D}$ через боковую поверхность трубки равен нулю, поэтому поток $\vec{D}$ через сечение трубки не изменяется. Взяв сечение в произвольном месте трубки, запишем

$$D_n dS_0 = D_l dS ,$$

где D_l - проекция вектора $\vec{D}$ на направление силовой линии в том же месте. Выражение для энергии проводника $W = q\varphi/2$ представим в виде

$$W = \frac{1}{2}\int_{\Sigma} D_n dS_0 \cdot \int_{1-\infty} E_l dl = \frac{1}{2}\int D_l dSE_l dl = \int \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} dV ,$$

Где интегрирование выполняется по всему объему.

Вид формулы (8) дает основания предположить, что электрическая энергия заключена не во взаимодействующих зарядах, а в их электрическом поле, заполняющем пространство. В рамках электростатики это предположение проверить экспериментально или обосновать теоретически невозможно, однако рассмотрение переменных электрических и магнитных полей позволяет удостовериться в правильности такой полевой интерпретации формулы (8).

Пример. Энергия сферического конденсатора.