2. Динамика

2.1. Законы Ньютона. Силы в механике

1. Первый закон Ньютона утверждает, что существуют такие системы отсчета, в которых любое тело, не взаимодействующее с другими телами, движется прямолинейно и равномерно или покоится. Такие системы отсчета называются инерциальными.

2. Второй закон Ньютона

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

выполняется в инерциальных системах отсчета. Здесь m – масса материальной точки, $\vec{a}$ - вектор ускорения точки, $\vec{F}$ – вектор силы, действующей на материальную точку. Если на материальную точку действует несколько сил, то под $\vec{F}$ нужно понимать их векторную сумму.

3. Силы характеризуют взаимодействия между телами. Согласно третьему закону Ньютона силы возникают парами: если первое тело действует на второе с некоторой силой $\vec{F}_1$, то второе тело действует на первое с силой $\vec{F}_2$, причем $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Силы зависят от взаимного расположения тел и, возможно, от скоростей их относительного движения. Рассмотрим силы, наиболее часто встречающиеся в механике.

4. Между двумя любыми материальными точками действует сила гравитационного притяжения, величина которой пропорциональна произведению масс точек m_1 и m_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}.$$

Здесь $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная. Эта формула выражает закон всемирного тяготения и определяет силу гравитационного взаимодействия между двумя телами, если расстояние между ними значительно больше размеров тел.

Можно доказать, что приведенная выше формула справедлива и при произвольных (не обязательно больших) расстояниях между телами, если оба тела являются однородными шарами. В этом случае под величиной r следует понимать расстояние между центрами шаров.

Формула для гравитационной силы остается также верной, если одно из взаимодействующих тел является однородным шаром, а другое –

материальной точкой, расположенной вне шара. В этом случае в формуле для гравитационной силы r – это расстояние от материальной точки до центра шара.

5. Одним из проявлений силы всемирного тяготения является сила тяжести. Так принято называть силу притяжения тел к Земле вблизи ее поверхности. Если M – масса Земли, R – ее радиус, m – масса некоторого тела, то действующая на тело сила тяжести равна

$$F = G\frac{M}{R^2}m = mg \ ,$$

где

$$\boxed{g = G\frac{M}{R^2}}$$

- ускорение свободного падения у поверхности Земли. Сила тяжести направлена к центру Земли.

6. Весом тела называют силу, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на опору или подвес. При этом предполагается, что тело неподвижно относительно опоры или подвеса.

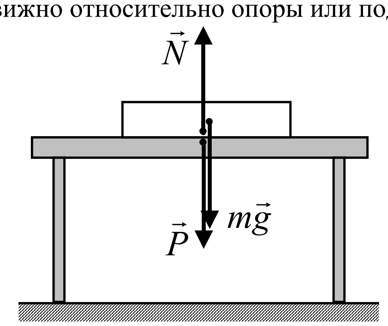


Рис. 2.1.

Пусть тело лежит на неподвижном относительно Земли горизонтальном столе (рис. 2.1). Систему отсчета, связанную с Землей, будем считать инерциальной**.** На тело действуют сила тяжести, направленная вертикально вниз, и сила упругости $\vec{N}$, с которой опора действует на тело. Силу $\vec{N}$ называют силой реакции опоры. В соответствии с третьим законом Ньютона тело действует на опору с силой $\vec{P}$, равной по модулю силе реакции опоры и направленной в противоположную сторону:

$$\vec{P} = -\vec{N} \ .$$

Сила $\vec{P}$ и есть вес тела. Если опора и тело неподвижны в некоторой инерциальной системе отсчета, то в соответствии со вторым законом Ньютона

$$0 = m\vec{g} + \vec{N} .$$

В этом случае

$$\vec{P} = -\vec{N} = m\vec{g} .$$

То есть вес неподвижного на горизонтальной опоре тела равен силе тяжести, действующей на тело. Приложены эти силы к разным телам.

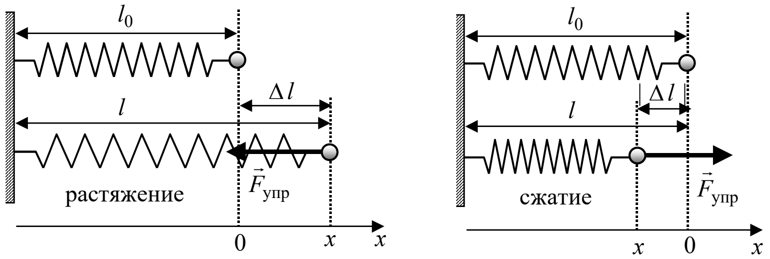


Рис. 2.2.

7. Сила упругости стремится восстановить прежние размеры и форму тела при его деформации. Простейшим видом деформации является деформация растяжения или сжатия (рис.2.2). Для определенности будем говорить далее о спиралевидной пружине. Пусть l_0 - длина недеформированной пружины, l – длина растянутой или сжатой пружины. Величину $\Delta l = l - l_0$ называют деформацией пружины (при растяжении $\Delta l > 0$, при сжатии $\Delta l < 0$). При малых деформациях сила упругости пропорциональна деформации

$$\boxed{F_{упр} = k\,|\,\Delta l\,|}$$

и направлена в сторону, противоположную направлению перемещения частиц тела при деформации. Если ось x выбрана так, как показано на рис.2.2, то проекция силы упругости на эту ось

$$\boxed{F_x = F_{упр\,x} = -kx}.$$

Это соотношение выражает экспериментально установленный закон Гука. Коэффициент k называется жесткостью пружины. Жесткость k зависит от формы и размеров тела, а также от свойств материала.

2.1. <u>Укажите ошибочные утверждения:</u>

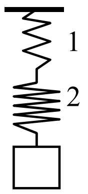
1. Тело движется туда, куда направлена приложенная к нему сила.

2. Машина движется прямолинейно с постоянной скоростью. Результирующая сила, действующая на машину, равна нулю.

3. Несмотря на то, что силы действия и противодействия равны по величине и противоположны по направлению, они не уравновешивают друг друга, потому что эти силы приложены к разным телам.

4. Один конец каната закреплен, а за другой тянут с силой 500 Н. Сила натяжения каната равна 500 Н.

5. В игре "перетягивание каната" участвуют две команды. Каждая тянет канат на себя с силой 5000 Н. Сила натяжение каната равна 10000 Н.



6. К двум различным последовательно соединенным легким динамометрам подвешено тело, массой $m = 1$ кг. Каждый динамометр показывает силу $F = mg = 9{,}8$ Н.

7. Если сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала, то все тела вблизи поверхности Земли падают с одинаковым ускорением, потому что гравитационная сила пропорциональна произведению масс взаимодействующих тел.

8. Брусок скользит по гладкой наклонной плоскости. Векторная сумма действующих на брусок сил тяжести и реакции опоры направлена параллельно наклонной плоскости.

<u>Примеры решения задач</u>

<u>Пример 2. 1.</u> На какой высоте h над поверхностью Земли ускорение свободного падения в $n = 16$ раз меньше, чем вблизи земной поверхности?

<u>Решение.</u>
На высоте h над поверхностью Земли на тело со стороны Земли действует гравитационная сила

$$F = G\frac{mM}{(h+R)^2},$$

где G – гравитационная постоянная, m – масса тела, M – масса Земли, R – радиус Земли, (h + R) - расстояние от тела до центра земного шара. При свободном падении никаких других сил на тело не действует. Поэтому

$$ma = G\frac{mM}{(h+R)^2},$$

где a – ускорение свободного падения на высоте h. Ускорение у поверхности Земли (при $h = 0$) обозначим g. Тогда

$$g = G\frac{M}{R^2},$$

$$a = G\frac{M}{(h+R)^2}.$$

Отсюда

$$n = \frac{g}{a} = \left(\frac{h+R}{R}\right)^2.$$

После преобразований получим

$$h = R(\sqrt{n} - 1) = 19200 \text{ км}.$$

Пример 2. 2. Груз массой m = 1 кг, закрепленный на пружине жесткостью k = 300 Н/м, поднимают за свободный конец пружины с ускорением a = 5 м/с^2, направленным вертикально вверх (рис.2.3). Длина пружины при этом равна l = 20 см. Определите длину l_0 пружины в недеформированном состоянии.

Решение.

На груз действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и упругости $\vec{F}$. Изобразим эти силы на рисунке (рис.2.4), обозначим вектор ускорения груза $\vec{a}$, ось x, направленную вертикально вверх. Запишем второй закон Ньютона для проекций векторных величин на ось x:

$$x:\quad ma = F - mg.$$

Модуль силы упругости F равен

$$F = k\Delta l = k(l - l_0).$$

Отсюда найдем

$$l_0 = l - m(a+g)/k = 15 \text{ см}.$$

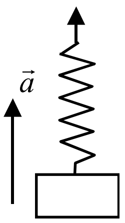


Рис. 2.3.

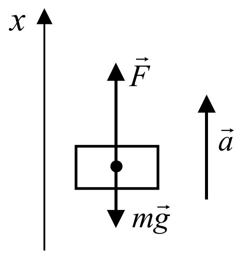


Рис. 2.4.

Пример 2. 3. Лифт в начале движения и при остановке имеет одинаковые по абсолютной величине ускорения. Чему равна величина этого ускорения, если вес человека, находящегося в лифте, в первом и во втором случае отличается в 3 раза?

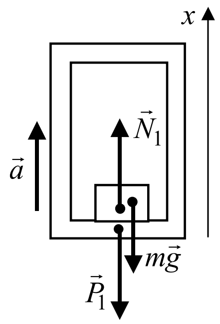


Рис. 2.5.

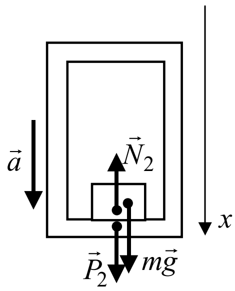


Рис. 2.6.

Решение.

Предположим, что лифт начинает двигаться вверх (рис.2.5). Тогда в начале движения ускорения лифта и человека относительно земли направлены вертикально вверх. На человека в лифте действуют силы тяжести и реакции опоры $\vec{N}_1$. По второму закону Ньютона

$$ma = N_1 - mg \ .$$

На рис.2.5 кроме векторов $m\vec{g}$ и $\vec{N}_1$ изображен также вектор силы $\vec{P}_1$, с которой человек действует на опору. Силы $\vec{P}_1$ и $\vec{N}_1$ равны по модулю, действуют вдоль одной прямой в противоположных направлениях и приложены к разным телам. Итак, в рассматриваемом случае

$$P_1 = N_1 = m(a+g)\,.$$

При остановке лифта его ускорение (и ускорение человека относительно земли) направлено вертикально вниз (рис.2.6). Поэтому

$$ma = mg - N_2\,,$$

$$P_2 = N_2 = m(g-a)\,.$$

По условию $P_1 = 3P_2$, или $m(g+a) = 3m(g-a)$. Отсюда

$$a = g/2 = 5 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2. 4. Тело массой m движется с ускорением $\vec{a}$ под действием сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Известны величина ускорения a, величина силы F_1 и угол α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{F}_1$. Определите F_2.

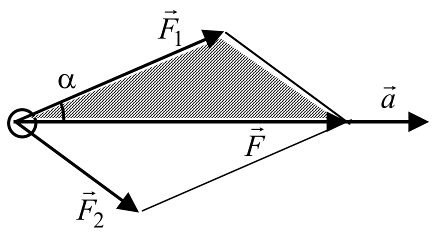


Рис. 2.7.

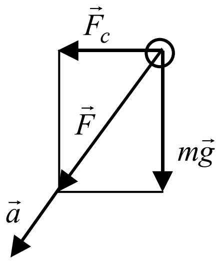


Рис. 2.8.

Решение.
По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}\,,$$

где

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2\,.$$

Следовательно, вектор результирующей силы $\vec{F}$ направлен так же, как и вектор ускорения $\vec{a}$. На рисунке изобразим векторы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, построим суммарный вектор $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (рис.2.7). Укажем вектор ускорения $\vec{a}$, отметим угол α. Рассматривая заштрихованный треугольник, заметим, что одна из его сторон равна модулю вектора $\vec{F}_1$, другая модулю вектора $\vec{F}_2$, третья сторона равна модулю вектора $\vec{F} = m\vec{a}$. Записывая для этого треугольника теорему косинусов, получим

$$F_2 = \sqrt{F_1^2 + (ma)^2 - 2maF_1 \cos\alpha}\ .$$

Пример 2. 5. Из окна движущегося по горизонтальной дороге автомобиля непослушный мальчик высовывает руку с яблоком и отпускает его. Величина ускорения яблока в начальный момент его падения равна a. Найдите величину F_c силы сопротивления воздуха, которая действовала на яблоко в этот момент. Масса яблока m, ускорение свободного падения g.

Решение.

На падающее яблоко действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c$, направленная против вектора скорости яблока. В начальный момент падения скорость яблока равна скорости автомобиля, поэтому сила сопротивления в этот момент направлена горизонтально. Построим векторы $\vec{F}_c$, $m\vec{g}$ и $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_c$ (рис.2.8). Запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника

$$F^2 = F_c^2 + (mg)^2\ .$$

Учитывая, что $m\vec{a} = \vec{F}$, получим

$$F_c = m\sqrt{a^2 - g^2}\ .$$

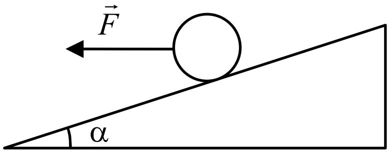


Рис. 2.9.

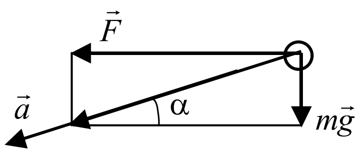


Рис. 2.10.

Пример 2. 6. На шероховатой наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом, находится шарик массы $m = 100$ г (рис.2.9). С какой горизонтальной силой F нужно тянуть шарик за прикрепленную к нему легкую нить, чтобы он двигался вдоль плоскости без трения?

Решение.

Шарик будет двигаться вдоль плоскости без трения, если сила реакции опоры равна нулю. Иными словами, шарик в данном случае движется вдоль наклонной плоскости, не касаясь ее. Изобразим на рис.2.10 действующие на шарик силы $\vec{F}$ и $m\vec{g}$. Векторная сумма этих сил $\vec{F} + m\vec{g}$ направлена так же, как и вектор ускорения, то есть вдоль наклонной плоскости. Из рисунка видно, что $\mathrm{tg}\alpha = mg / F$. Отсюда найдем

$$F = mg \cdot \mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{3} \approx 1{,}7 \text{ Н}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Законы Ньютона. Вес тела.

2.2. Сила $F_1 = 60$ Н сообщает телу ускорение $a_1 = 0{,}8$ м/с^2. Какая сила сообщит этому телу ускорение $a_2 = 2$ м/с^2?

2.3. Порожний грузовой автомобиль массой $m = 4$ т начинает движение с ускорением $a_1 = 0{,}3$ м/с^2. После загрузки при той же силе тяги он трогается с места с ускорением $a_2 = 0{,}2$ м/с^2. Сколько тонн груза принял автомобиль? Сопротивлением движению пренебречь.

2.4. С какой силой нужно действовать на тело массой $m = 2$ кг, чтобы оно поднималось вертикально с ускорением $a = 2g$?

2.5. С каким ускорением поднимают груз на веревке, если ее натяжение увеличилось втрое по сравнению с натяжением, создаваемым неподвижным грузом?

2.6. Груз на веревке поднимают сначала с ускорением $a_1 = 4$ м/с^2, направленным вертикально вверх, а затем с ускорением $a_2 = 3$ м/с^2, направленным вертикально вниз. Во сколько раз отличаются силы натяжения веревки?

2.7. Трос выдерживает неподвижно подвешенный груз максимальной массы $m_1 = 450$ кг. С каким максимальным ускорением a можно поднимать груз массой $m_2 = 400$ кг, подвешенный на этом тросе, чтобы он не оборвался?

2.8. На нити можно поднимать вертикально вверх с ускорением $a = 2$ м/с^2 груз максимальной массы $m_1 = 1$ кг без разрыва нити. Определите максимальную массу груза m_2, который можно равномерно опускать на этой нити.

2.9. Шарик массой $m = 50$ г тонет в жидкости. В некоторый момент времени его ускорение равно $a = 2$ м/с^2 и направлено вертикально вниз. С какой силой F жидкость в этот момент действует на шарик?

2.10. Груз массой $m = 20$ кг лежит на полу движущегося лифта и давит на него с силой $F = 240$ Н. Определите величину a и направление вектора ускорения лифта.

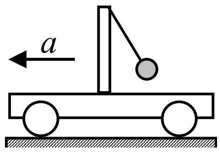
2.11. Какая сила действует на космонавта массой $m = 70$ кг со стороны ракеты при ее вертикальном взлете с ускорением $a = g/2$?

2.12. Под действием силы $\vec{F}_1$ тело движется с ускорением $a_1 = 0{,}3$ м/с^2. С каким ускорением a_2 будет двигаться это тело под действием двух взаимно перпендикулярных сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, если $\left|\vec{F}_1\right| = 30$ Н, а $\left|\vec{F}_2\right| = 40$ Н?

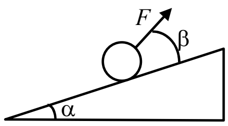
2.13. Тело массой $m = 10$ кг передвигают вдоль гладкой горизонтальной поверхности, действуя на него с силой $F = 40$ Н под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту. Найдите ускорение тела.

2.14. Бусинка скользит по гладкому стержню, составляющему угол $\alpha = 60^0$ с вертикалью. Чему равно ускорение a бусинки?

2.15. Нить с грузом массы m подвешена на тележке, которая движется с ускорением a. Найдите силу натяжения нити T после того, как она займет устойчивое наклонное положение. Сопротивлением воздуха пренебречь.



2.16. На шероховатой наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом, находится шарик массы $m = 100$ г. С какой силой F, направленной под углом $\beta = 45^0$ к наклонной плоскости, нужно тянуть шарик за прикрепленную к нему легкую нить, чтобы он двигался вдоль плоскости без трения?



2.17. * В некоторый момент времени ускорение находящейся в полете пули направлено горизонтально, а величина ускорения равна a. Определите величину силы сопротивления воздуха F, действующей на пулю в этот момент. Масса пули m.

Гравитация

2.18. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между однородным шаром и материальной точкой, соприкасающейся с шаром, если материальную точку удалить от поверхности шара на расстояние, равное двум диаметрам шара?

2.19. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между двумя одинаковыми однородными шарами, если вначале шары соприкасались друг с другом, а затем один из шаров отодвинули на расстояние, равное диаметру шаров?

2.20. Во сколько раз изменится сила гравитационного притяжения между двумя шарами, если массу одного из них увеличить в 2 раза, массу другого увеличить в 3 раза, а расстояние между центрами шаров уменьшить в 2 раза?

2.21. Радиус некоторой планеты в $\sqrt{2}$ раз меньше радиуса Земли, а ускорение силы тяжести на поверхности планеты в 3 раза меньше, чем на поверхности Земли. Во сколько раз масса планеты меньше массы Земли?

2.22. Радиус некоторой планеты в $n = 10$ раз больше радиуса Земли, а ускорение свободного падения вблизи поверхности планеты в $m = 5$ раз больше, чем вблизи поверхности Земли. Определите отношение $\rho_{пл}/\rho_з$ средних плотностей вещества планеты и Земли.

2.23. Тело свободно падает с начальной скоростью равной нулю один раз на высоте $H_1 = R$, другой раз на высоте $H_2 = 2R$ от поверхности Земли. Здесь R – радиус Земли. Найдите отношение путей s_1 и s_2, пройденных телом за $\tau = 1$ с на высотах H_1 и H_2 соответственно.

Сила упругости

2.24. В лифте, опускающемся с ускорением $a = 1$ м/с^2, на пружине жесткостью $k = 540$ Н/м висит груз (он неподвижен относительно лифта). Найдите массу груза, если удлинение пружины равно $\Delta l = 1$ см.

2.25. Груз массой $m = 100$ г, подвешенный на пружине жесткостью $k = 20$ Н/м, совершает вертикальные колебания. С каким ускорением a движется шарик в момент времени, когда пружина растянута на $x = 2$ см?

2.26.* Шарик подвешен на упругой нити жесткости k и движется в вертикальной плоскости. В некоторый момент времени нить отклонена от вертикали на угол α, а ее удлинение равно Δl . Определите ускорение шарика в этом момент. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.2. Силы трения и сопротивления

Силы трения могут действовать между соприкасающимися телами как при их относительном движении, так и при их относительном покое. Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки (смазки) называется сухим.

Сухое трение, возникающее при относительном покое тел, называют трением покоя. Сила трения покоя всегда равна по величине внешней силе и направлена в противоположную сторону.

Рассмотрим тяжелый брусок, расположенный на поверхности горизонтального стола. Приложим к бруску горизонтальную силу $\vec{F}$, которую будем постепенно увеличивать (рис.2.11). Опыт показывает, что, пока сила F меньше некоторой определенной величины F_{max}, брусок остается в покое. Отсюда следует вывод, что на брусок со стороны стола действует в этом случае равная и противоположно направленная сила, уравновешивающая внешнюю силу $\vec{F}$. Это и есть сила трения покоя. Сила трения покоя автоматически принимает значения, равные внешней силе F.

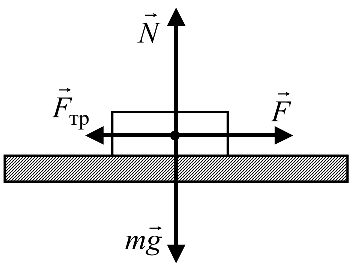


Рис. 2.11.

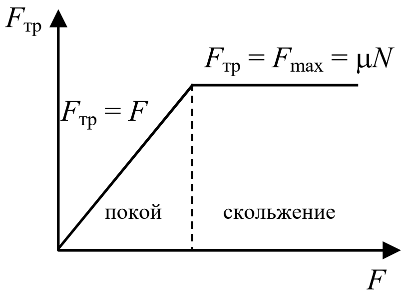


Рис. 2.12.

Сила трения покоя не может превысить некоторого максимального значения F_{max}. Когда величина внешней силы F превысит F_{max}, брусок начинает скользить. Силу трения в этом случае называют силой трения скольжения. Она направлена в сторону, противоположную направлению движения и, вообще говоря, зависит от относительной скорости тел. Однако, во многих случаях приближенно силу трения скольжения можно считать независящей от величины относительной скорости тел и равной максимальной силе трения покоя. Эта модель силы сухого трения применяется при решении многих простых физических задач. На рис. 2.12 показан график зависимости силы трения от внешней силы F в рамках такой модели.

Опыт показывает, что величина силы трения скольжения равна

$$\boxed{F_{тр} = \mu N}$$

где μ - коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния поверхности соприкасающихся поверхностей, N – сила нормального давления, прижимающая поверхности друг к другу. Такой же формулой определяется максимальное значение силы трения покоя.

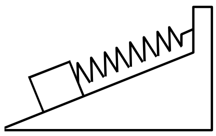
Трение, как и все другие виды взаимодействия, подчиняется третьему закону Ньютона: если на первое тело со стороны второго тела действует сила трения, то такая же по модулю, но противоположно направленная сила действует на второе тело со стороны первого.

Силы трения, как и упругие силы, имеют электромагнитную природу. Они возникают вследствие взаимодействия между атомами и молекулами соприкасающихся тел.

2.27. Укажите ошибочные утверждения:

1. Шайбу массой m, расположенную на горизонтальном столе, тянут при помощи нити, параллельной поверхности стола. Если шайба скользит по столу, то сила трения, действующая на шайбу, равна $F_{тр} = \mu mg$, где μ - коэффициент трения. Если шайба остается в покое, то $F_{тр} < \mu mg$.

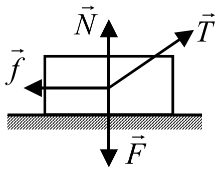
2. Брусок скользит по наклонной плоскости. Сила трения равна $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$ при движении бруска вверх, при его движении вниз, а также при любом криволинейном движении бруска по наклонной плоскости. В каждый момент времени сила трения направлена против вектора скорости.



3. На наклонной плоскости, составляющей угол α к горизонту, покоится брусок массой m, закрепленный на пружине. Пружина при этом растянута. Если сила упругости пружины $F_{упр} < mg\sin\alpha$, то

сила трения, действующая на брусок, направлена вверх вдоль наклонной плоскости, если $F_{\text{упр}} > mg\sin\alpha$, то сила трения направлена вниз вдоль наклонной плоскости.

4. Мальчик тянет деревянный брусок по шероховатому горизонтальному столу с постоянной скоростью. На рисунке показаны сила натяжения веревки $\vec{T}$, сила тяжести бруска $\vec{F}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}$. Можно утверждать, что $T > f$ и $N = F$.



Примеры решения задач

Пример 2. 7. Брусок равномерно соскальзывает по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^0$. С каким ускорением *a* будет двигаться брусок, если ему сообщить начальную скорость вверх вдоль наклонной плоскости?

Решение

При равномерном движении бруска вниз (рис.2.13)

$$0 = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}.$$

При движении бруска вверх (рис.2.14)

$$ma_x = mg\sin\alpha + F_{\text{тр}}.$$

Заметим, что силы трения в обоих случаях одинаковы ($F_{mp} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$). Из этих уравнений получим

$$a = a_x = 2g\sin\alpha = 10 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2. 8. Удобный метод измерения коэффициента трения состоит в следующем. Тело кладется на наклонную плоскость и измеряется минимальный угол α наклона плоскости к горизонту, при котором начинается скольжение. Считая угол α известным, определите коэффициент трения μ.

Решение

Действующие на тело силы изображены на рис.2.13. Угол α соответствует пограничному режиму, когда одновременно выполняются два условия

$$F_{\text{тр}} = \mu N \ , \quad a = 0 \ .$$

Первое из этих условий соответствует скольжению тела, а второе – его покою (тело уже начинает скользить, но его ускорение еще очень мало). Тогда

$$x: \quad 0 = mg\sin\alpha - \mu N \ ,$$
$$y: \quad 0 = N - mg\cos\alpha \ .$$

Из этих уравнений найдем $\mu = \mathrm{tg}\alpha$.

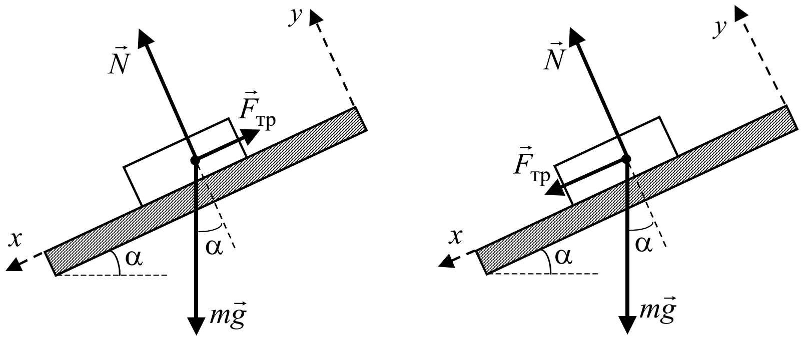


Рис. 2.13. Рис. 2.14.

<u>Пример 2. 9.</u> Угол наклона ленты подъемника к горизонту α = arcsin 0,2. Коэффициент трения между грузом и лентой μ = 0,4. При какой максимальной величине a ускорения ленты поднимаемый груз не будет скользить по ней?

<u>Решение</u>

Силы, действующие на груз, изображены на рис.2.13. По второму закону Ньютона

$$-ma_{\text{гр}} = -F_{\text{тр}} + mg\sin\alpha \ ,$$

где $a_{\text{гр}}$ – ускорение груза. Максимальная величина силы трения покоя равна μN , где N – сила реакции опоры. Эту силу найдем из уравнения

$$0 = N - mg\cos\alpha \ .$$

Следовательно, максимальное ускорение груза равно

$$a_{\text{гр}} = \frac{\mu N - mg\sin\alpha}{m} = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \ .$$

Если ускорение ленты превысит эту величину, то лента будет обгонять груз, то есть будет иметь место проскальзывание груза относительно ленты. Итак,

$$a = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \approx 1{,}9 \text{ м/с}^2.$$

<u>Пример 2. 10.</u> Санки массой $m = 5$ кг покоятся на горизонтальной поверхности. Их начинают тянуть за веревку с силой $F = 5$ Н, направленной под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Определите ускорение санок и величину действующей на них силы трения, если коэффициент трения санок о поверхность $\mu = 0{,}1$.

<u>Решение</u>

На санки действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила натяжения нити $\vec{F}$ (рис.2.15). Запишем второй закон Ньютона для проекций векторных величин на горизонтальную (x) и вертикальную (y) оси:

$$\begin{aligned} x:&\quad ma = F\cos\alpha - F_{\text{тр}} \\ y:&\quad 0 = F\sin\alpha + N - mg \end{aligned}.$$

Трудность состоит в том, что заранее не известно скользят санки или покоятся. Если они скользят, то для силы трения можно записать формулу $F_{\text{тр}} = \mu N$, если же санки покоятся, то сила трения меньше величины μN.

Предположим, что санки скользят. Тогда $F_{\text{тр}} = \mu N$. После решения задачи в рамках такого предположения, необходимо будет проверить, что сделанное предположение действительно верно, то есть ускорение санок $a > 0$. Нарушение последнего неравенства будет означать, что санки покоятся.

Итак

$$F_{\text{тр}} = \mu N \text{ (если санки скользят)},$$

$$N = mg - F\sin\alpha,$$

$$ma = F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha).$$

Подставляя численные значения, получим

$$ma = 5\sqrt{3}/2 - 0{,}1(50 - 5\cdot 0{,}5) < 0.$$

Пришли к противоречию: предполагалось, что $a > 0$, а в результате решения получили $a < 0$. Следовательно, санки в данном случае не скользят, и их ускорение равно нулю. Сила трения в этом случае равна

$$F_{тр} = F\cos\alpha - ma = F\cos\alpha = 5\cdot\sqrt{3}/2 \approx 4{,}3 \text{ Н}$$

Эта сила меньше максимальной силы трения покоя:

$$F_{тр} < \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha) = 4{,}75 \text{ Н}.$$

Итак, $$a = 0, \quad F_{тр} = F\cos\alpha \approx 4{,}3 \text{ Н}.$$

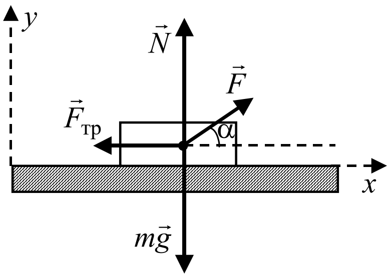


Рис. 2.15.

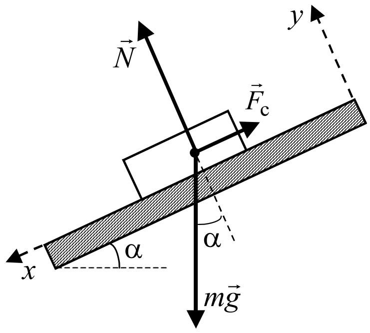


Рис. 2.16.

<u>Пример 2. 11.</u> При скоростном спуске по склону с углом наклона α лыжник развивает такую скорость, что силу сопротивления воздуха можно считать пропорциональной квадрату его скорости V: $F_c = kV^2$, где k - постоянная. Найдите максимальную скорость V_{max} лыжника, если его масса m. Трением лыж о снег пренебречь.

<u>Решение</u>

Действующие на лыжника силы изображены на рис.2.16. Запишем второй закон Ньютона для проекций векторных величин на ось x, направленную вниз вдоль склона горы:

$$ma_x = mg\sin\alpha - kV^2.$$

Из этой формулы видно, что по мере увеличения скорости лыжника его ускорение уменьшается. Иными словами, чем больше скорость, тем больше сила сопротивления и тем медленнее увеличивается скорость. В конечном счете, сила сопротивления сравняется со скатывающей силой $mg\sin\alpha$, и далее лыжник будет двигаться с постоянной скоростью. Эту максимальную скорость найдем из уравнения:

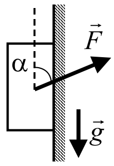
$$0 = mg\sin\alpha - kV_{\max}^2 .$$

Отсюда

$$V_{\max} = \sqrt{mg\sin\alpha / k} .$$

Задачи для самостоятельного решения

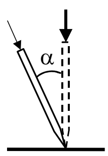
Трение покоя и трение скольжения



2.28. Брусок массой m прижимают к вертикальной стене с силой $F = 5$ Н, направленной под углом $\alpha = 60^0$ к вертикали. Коэффициент трения между бруском и стеной $\mu = 0{,}4$. При какой максимальной массе m брусок будет оставаться неподвижным?

2.29. Брусок массой $m = 0{,}5$ кг прижимают к вертикальной стене с силой $F = 5$ Н, направленной вверх под углом $\alpha = 60^0$ к вертикали. Коэффициент трения бруска по стене $\mu = 0{,}4$. Найдите ускорение бруска a.

2.30.* Брусок массой $m = 0{,}3$ кг прижимают к вертикальной стене с силой $F = 4$ Н, направленной перпендикулярно к стене. Коэффициент трения скольжения бруска по стене $\mu = 0{,}8$. Найдите а) ускорение бруска, б) величину результирующей силы F_0, с которой стена действует на брусок.



2.31. * Карандаш удерживают на столе в вертикальном положении, нажимая на него сверху пальцем. Продолжая давить на верхний конец, карандаш медленно отклоняют от вертикали. Когда угол отклонения от вертикали достигает значения $\alpha = 30^0$, карандаш падает. Найдите коэффициент трения μ между карандашом и столом, считая, что действующая на карандаш сила тяжести значительно меньше силы, которая прижимает карандаш к столу.

2.32.* На горизонтальной доске лежит брусок массой $m = 1$ кг. Один конец доски медленно поднимают. Найдите зависимость $F_{\text{тр}}(\alpha)$ силы трения $F_{\text{тр}}$, действующей на брусок, от угла наклона α доски к горизонту и постройте график этой зависимости. Коэффициент трения между доской и бруском $\mu = 1/\sqrt{3}$.

2.33.** К вертикальной железной стене "прилипла" намагниченная шайба. К шайбе привязана легкая нить, за которую тянут так, что нить все время остается параллельной стене. Когда нить тянут вертикально вверх, шайба начинает двигаться при минимальной силе $F_1 = 1{,}6$ Н, когда нить тянут вертикально вниз, шайба приходит в движение при силе $F_2 = 0{,}6$ Н. С какой минимальной силой F нужно тянуть нить в горизонтальном направлении, чтобы сдвинуть шайбу?

2.34.** К вертикальной железной стене "прилипла" намагниченная шайба. К шайбе привязана легкая нить, за которую тянут так, что нить остается параллельной стене. Чтобы перемещать шайбу с постоянной скоростью по стене вертикально вверх нужно тянуть за нить с силой F_1, чтобы перемещать шайбу с постоянной скоростью вертикально вниз – с силой F_2. С какой силой F нужно тянуть шайбу за нить, чтобы она перемещалась с постоянной скоростью по стене в горизонтальном направлении?

Наклонная плоскость

2.35. Брусок, пущенный вверх вдоль наклонной плоскости, поднимается по ней, а затем соскальзывает вниз. Величины ускорений бруска при движении вверх и вниз равны соответственно $a_1 = 7$ м/с^2 и $a_2 = 3$ м/с^2. Найдите угол наклона α плоскости к горизонту.

2.36. * Тело толкнули вверх вдоль шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. При подъеме величина ускорения тела равна a_1. Определите величину ускорения a_2 при последующем спуске тела.

2.37.* Шайбу положили один раз на наклонную плоскость с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^0$, а второй раз – на наклонную плоскость с углом наклона $\beta = 60^0$. Во сколько раз сила трения в первом случае больше, чем во втором? Коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 0{,}8$ в обоих случаях.

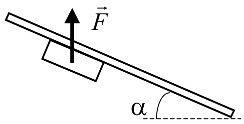
2.38.* По длинной наклонной доске начинает соскальзывать брусок. Угол наклона доски к горизонту медленно уменьшают. При каком угле наклона α брусок начнет замедляться? Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 1/\sqrt{3}$.

2.39. Брусок массы $m = 200$ г соскальзывает с наклонной плоскости с ускорением $a_1 = 3$ м/с^2. С каким ускорением a_2 будет соскальзывать брусок, если его прижимать к плоскости с силой F = 1 Н, перпендикулярной плоскости? Коэффициент трения между бруском и плоскостью μ = 0,2.

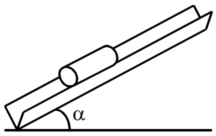
2.40.* Санки массой m = 4 кг равномерно съезжают с горки, поверхность которой составляет угол α = 30° с горизонтом. С какой силой F нужно тянуть санки за веревку, угол наклона которой относительно поверхности горки также равен α, чтобы поднимать санки по горке вверх с постоянной скоростью?

2.41.* Брусок массой m скользит по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, с ускорением a. С какой силой брусок действует на наклонную плоскость?

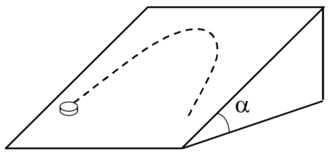
2.42.* Брусок массой m = 0,2 кг прижимают к нижней поверхности плиты с силой F = 5 Н, направленной вертикально вверх. Плита закреплена под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту, коэффициент трения между бруском и плитой μ = 0,5. Найдите ускорение бруска a.



2.43.* Определите ускорение a цилиндра, соскальзывающего по наклонному желобу в виде прямоугольного уголка, ребро которого составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^0$. Плоскости желоба образуют одинаковые углы с горизонтом. Коэффициент трения между цилиндром и плоскостями желоба μ = 0,2.



2.44.** Небольшой шайбе сообщают начальную скорость, после чего она скользит по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, как показано на рисунке. Определите: а) ускорение a_1 шайбы, если трение между плоскостью и шайбой пренебрежимо мало, б) ускорение a_2 шайбы в верхней точке траектории, если коэффициент трения между плоскостью и шайбой равен μ.



<u>Наклонная плоскость (с кинематикой)</u>

2.45. Какое расстояние s до верхней точки траектории пройдет брусок, пущенный вверх вдоль наклонной плоскости с начальной скоростью $v_0 = 5$ м/с? Плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = \arcsin(3/5)$, коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}5$.

2.46. Бруску, находящемуся на наклонной плоскости, сообщили начальную скорость $v_0 = 5$ м/с, направленную вниз вдоль наклонной плоскости. Через какое время t скольжение бруска прекратится? Плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^0$, коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}8$.

2.47. Бруску, находящемуся на наклонной плоскости, сообщили начальную скорость $v_0 = 5$ м/с, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Через какое время t скольжение бруска относительно плоскости прекратится? Плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^0$, коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}8$.

2.48. Ледяная горка составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^0$. По горке снизу вверх пускают камень, который, пройдя за время $t = 2$ с путь $S = 12$ м, начинает двигаться в обратную сторону. Определите коэффициент трения μ камня о горку.

2.49. Тело находится на вершине наклонной плоскости, длина основания и высота которой равны $l = 6$ м. Определите, за какое время t тело соскользнет с наклонной плоскости, если максимальный наклон, при котором тело находится на этой плоскости в покое, наблюдается при высоте плоскости $H = 2{,}4$ м при прежней длине основания.

2.50.* По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45^0$, пустили снизу вверх шайбу с начальной скоростью $v_0 = 2$ м/с. Коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0{,}4$. С какой скоростью v шайба вернется в точку, из которой она начала движение вверх?

2.51. Вагон массой $m = 1$ т спускается по канатной дороге с уклоном $\alpha = 30^0$ к горизонту, тормозясь канатом. Скорость вагона перед торможением $v_0 = 2{,}5$ м/с, а время торможения до остановки $\tau = 5$ с. Считая движение равнозамедленным, определите величину T силы натяжения каната. Силой трения пренебречь.

Сила сопротивления, зависящая от скорости

2.52. Парашютист массой $m_1 = 80$ кг спускается на парашюте с установившейся скоростью $V_1 = 5$ м/с. Какой будет установившаяся скорость V_2, если на том же парашюте будет спускаться мальчик массой

$m_2 = 40$ кг? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости.

2.53. Автомобиль движется со скоростью $V_0 = 72$ км/ч по ветру, скорость которого относительно земли равна $V = 15$ м/с. Во сколько n раз увеличится сила сопротивления воздуха при движении автомобиля с той же скоростью против ветра? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля относительно воздуха.

2.54.* Автомобиль трогается с места с ускорением $a_1 = 2$ м/с^2. При скорости $V = 50$ км/ч ускорение автомобиля стало равным $a_2 = 1$ м/с^2. С какой установившейся скоростью V_0 будет двигаться автомобиль, если сила сопротивления пропорциональна скорости? Силу тяги при движении автомобиля считать постоянной.

2.3. Системы взаимодействующих тел

Чтобы проанализировать движение системы взаимодействующих тел, следует записать уравнения, выражающие второй закон Ньютона, для каждого из тел системы. При этом важно иметь в виду, что взаимодействие между телами носит обоюдный характер. Это означает, что силы взаимодействия между телами возникают парами, эти силы действуют вдоль одной прямой, противоположны по направлению и равны по модулю. Ускорения различных тел могут быть связаны между собой некоторыми соотношениями, отражающими жесткие или упругие связи между телами.

Примеры решения задач

Пример 2. 12. Грузы массами $m_1 = 0{,}4$ кг и $m_2 = 0{,}6$ кг, связанные легкой нерастяжимой нитью, движутся вертикально вверх под действием силы $F = 15$ Н, приложенной к верхнему грузу массой m_1. Определите величину T силы натяжения нити.

Решение

На верхний груз массой m_1 кроме силы $\vec{F}$ действует сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, на нижний груз действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}'$ (рис.2.17). Так как масса нити пренебрежимо мала, то $|\vec{T}| = |\vec{T}'| = T$. Поскольку нить нерастяжима, то грузы движутся с одинаковыми ускорениями $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$. Запишем уравнения, выражающие второй закон Ньютона для каждого груза, спроектировав векторные величины на ось x, направленную вертикально вверх:

$$m_1 a = F - m_1 g - T \ ,$$

$$m_2 a = T - m_2 g \ .$$

Разделив первое уравнение на второе, получим уравнение относительно силы натяжения T:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{F - m_1 g - T}{T - m_2 g} \ .$$

Из этого уравнения найдем

$$T = \frac{F m_2}{m_1 + m_2} = 9 \text{ Н.}$$

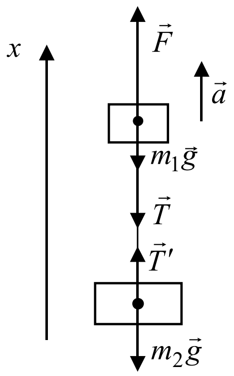


Рис. 2.17.

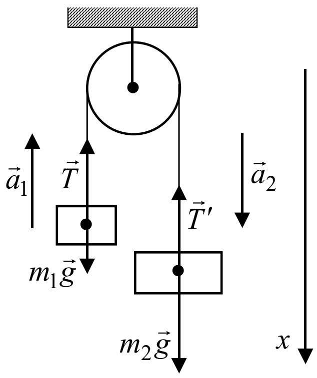


Рис. 2.18.

<u>**Пример 2. 13.**</u> Сила натяжения нити, соединяющей грузы массами m_1 = 200 г и m_2 (рис.2.18), равна T = 3 Н. Найдите m_2. Нить нерастяжима, трение в оси блока отсутствует, массами блока и нити пренебречь.

<u>Решение</u>

Изобразим силы, действующие на каждый из грузов (рис. 2.18). Силы натяжения нити $\vec{T}$ и $\vec{T}'$ равны при выполнении следующих условий: а) нить легкая, б) блок легкий, в) трение в оси блока отсутствует. Заметим, что сила тяжести, действующая на груз массой m_1 равна $m_1 g$ = 2 Н. Эта сила меньше силы натяжения нити T = 3 Н. Следовательно, груз m_1 будет подниматься, а груз m_2 опускаться. Ускорения грузов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ равны по величине, поскольку нить нерастяжимая: $a_1 = a_2 = a$. Выбирая ось x, как показано на рисунке, запишем систему уравнений

$$-m_1 a = m_1 g - T \ ,$$

$$m_2 a = m_2 g - T \ .$$

Из этих уравнений найдем

$$m_2 = \frac{m_1 T}{2 m_1 g - T} = 600 \text{ г.}$$

<u>Пример 2. 14.</u> На горизонтальном столе покоится тележка, на тележке - брусок. На тележку начинают действовать в горизонтальном направлении с постоянной силой F (см. рис.2.19), в результате чего тележка и брусок начинают двигаться относительно стола с различающимися в $n = 2$ раза ускорениями. Найдите силу F, если масса бруска $m = 1$ кг, масса тележки $M = 2$ кг, коэффициент трения бруска о поверхность тележки $\mu = 0{,}5$. Трением качения пренебречь.

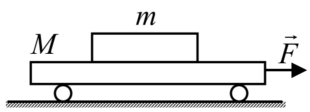


Рис. 2.19.

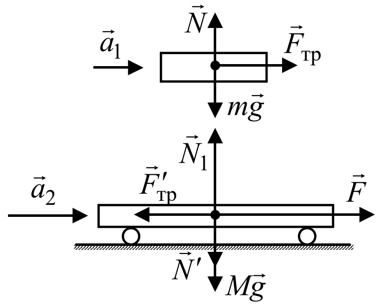


Рис. 2.20.

<u>Решение</u>

На рис.2.20 изображены силы, действующие на брусок и тележку (для наглядности брусок и тележка изображены отдельно). Сила трения $\vec{F}'_{\text{тр}}$, действующая со стороны бруска на тележку, тормозит ее движение. По третьему закону Ньютона такая же по величине, но противоположно направленная сила $\vec{F}_{\text{тр}}$ действует со стороны тележки на брусок. Именно эта сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и вовлекает брусок в движение. Сила реакции опоры $\vec{N}$ действует на брусок со стороны тележки. Такая же по величине, но противоположно направленная сила $\vec{N}'$ действует на тележку со стороны бруска (сила веса бруска). Сила $\vec{N}_1$ действует на тележку со стороны стола. Запишем второй закон Ньютона, для проекций векторных величин на горизонтальную ось:

$$ma_1 = F_{\text{тр}},$$

$$Ma_2 = F - F'_{\text{тр}},$$

где a_1 – ускорение бруска, a_2 – ускорение тележки. По условию задачи эти ускорения отличаются в два раза. Ясно, что ускорение бруска в данном случае не может превышать ускорения тележки, поэтому

$$a_2 = na_1.$$

Поскольку между тележкой и бруском имеет место проскальзывание, то

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg.$$

По третьему закону Ньютона $F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}}$. Итак, имеем систему уравнений

$$ma_1 = \mu mg,$$

$$Mna_1 = F - \mu mg,$$

решая которую, получим

$$F = \mu mg\left(1 + \frac{nM}{m}\right) = 25 \text{ Н}.$$

<u>Пример 2. 15.</u> На тележке массой M = 2 кг, покоящейся на горизонтальной поверхности, лежит брусок массой m = 1 кг. Коэффициент трения бруска о поверхность тележки μ = 0,4. Чему будет равна сила трения $F_{\text{тр}}$, действующая на брусок, если к тележке приложить постоянную горизонтальную силу F = 9 Н (рис.2.19)?

<u>Решение</u>

В отличие от предыдущей задачи в данном случае нам изначально не известно, будет ли брусок скользить по поверхности тележки, или тележка и брусок будут двигаться как единое целое, без проскальзывания относительно друг друга. Предположим сначала, что имеет место проскальзывание. Это означает, что ускорение тележки a_2 больше, чем ускорение бруска a_1. Сила трения в данном случае представляет собой силу трения скольжения и

$$F_{\text{тр}} = F'_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$$

(см. рис.2.20). Тогда

$$ma_1 = F_{\text{тр}} = \mu mg\ ,$$

$$Ma_2 = F - F'_{\text{тр}} = F - \mu mg\ .$$

Из этих уравнений найдем

$$a_1 = \mu g = 4\ \text{м/с}^2, \quad a_2 = (F - \mu mg)/M = 2{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Мы пришли к противоречию: предполагалось, что $a_2 > a_1$, а в результате решения получили $a_2 < a_1$. Следовательно, брусок и тележка движутся без проскальзывания как единое целое и $a_1 = a_2$. В этом случае

$$ma_1 = F_{\text{тр}}\ ,$$

$$Ma_1 = F - F'_{\text{тр}}\ .$$

Складывая эти уравнения, найдем ускорение

$$a_1 = a_2 = \frac{F}{m+M}\ ,$$

а затем силу трения

$$F_{\text{тр}} = ma_1 = \frac{Fm}{m+M} = 3\ \text{Н}.$$

Заметим, что эта сила трения меньше силы трения скольжения

$$F_{\text{тр ск}} = \mu mg = 4\ \text{Н}.$$

<u>Пример 2. 16.</u> Две шайбы массами m и $2m$, соединенные легкой пружиной, движутся вдоль одной прямой по горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени скорости шайб направлены одинаково (рис.2.21), причем легкая шайба движется замедленно с ускорением $a_1 = 3$ м/с². Растянута или сжата пружина в этот момент времени? Определите в этот момент величину a_2 и направление вектора ускорения тяжелой шайбы. Коэффициент трения между каждой шайбой и поверхностью $\mu = 0{,}2$.

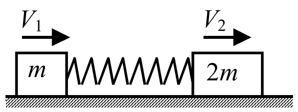


Рис. 2.21.

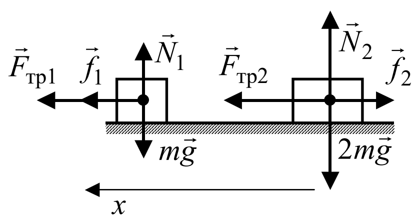


Рис. 2.22.

Решение

Силы трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$, действующие на шайбы, направлены противоположно векторам скорости шайб (рис.2.22). Поскольку первая шайба движется замедленно, то вектор ее ускорения направлен против вектора скорости. Ускорение $a_{тр}$, которое может сообщить первой шайбе сила трения $\vec{F}_{тр1}$, равно

$$a_{тр} = F_{тр1} / m = \mu mg / m = \mu g = 2 \text{ м/с}^2.$$

Это ускорение меньше, чем $a_1 = 3$ м/с^2. Следовательно, сила упругости $\vec{f}_1$, действующая на первую шайбу, должна «помогать» силе трения, то есть силы $\vec{f}_1$ и $\vec{F}_{тр1}$ направлены одинаково. Таким образом, приходим к выводу, что пружина в рассматриваемый момент времени сжата, и сила упругости $\vec{f}_2$, действующая на вторую (более массивную) шайбу, направлена, против силы $\vec{F}_{тр2}$.

Запишем второй закон Ньютона для проекций векторных величин на ось x (рис.2.22):

$$ma_1 = \mu mg + f_1,$$

$$2ma_2 = 2\mu mg - f_2.$$

Так как пружина легкая, то $f_1 = f_2$. Складывая записанные выше уравнения, получим

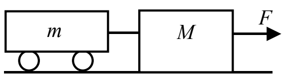
$$a_1 + 2a_2 = 3\mu g.$$

Отсюда найдем

$$a_2 = \frac{3\mu g - a_1}{2} = 1{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.55. Брусок и тележка, связанные легкой нерастяжимой нитью, движутся по горизонтальному столу под действием горизонтально направленной силы $F = 40$ Н. Найдите силу T натяжения нити. Масса бруска $M = 6$ кг, масса тележки $m = 4$ кг, коэффициент трения бруска о стол $\mu = 0{,}5$, трением качения пренебречь.



2.56. Два шара одинакового диаметра, связанные между собой нитью, опускаются в жидкости вертикально один за другим с малой постоянной скоростью. Определите величину силы натяжения T нити, если массы шаров равны $m_1 = 2{,}2$ кг и $m_2 = 1{,}4$ кг соответственно.

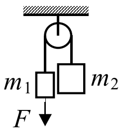
2.57. Два бруска, связанные нитью, равномерно поднимают вверх вдоль наклонной плоскости, прикладывая к верхнему бруску массой $m_1 = 2$ кг силу $F = 30$ Н, параллельную плоскости. Масса нижнего бруска $m_2 = 4$ кг. Коэффициенты трения между брусками и плоскостью одинаковы. Определите силу натяжения T нити.

2.58. * Вертолет массой M вместе с грузом массой m, висящем на тросе, взлетает вертикально вверх с ускорением a. При таком взлете трос обрывается. Определите ускорение a_1 вертолета сразу после обрыва троса.

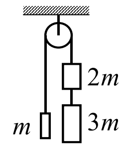
2.59. К одному концу веревки, перекинутой через блок, подвешен груз массой $m = 10$ кг. С какой силой F нужно тянуть вниз за другой конец веревки, чтобы груз поднимался с ускорением $a = 1$ м/с^2? Массами веревки и блока пренебречь. Веревка нерастяжима, трение в оси блока отсутствует.

2.60. Два тела суммарной массой $M = 0{,}5$ кг, прикрепленные к концам легкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, движутся с ускорением $a = 2$ м/с^2. Найдите массу m добавочного груза, который нужно положить на одно из тел, чтобы тела стали двигаться равномерно. Массой блока и трением в оси блока пренебречь.

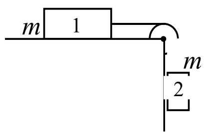
2.61. Определите величину a и направление ускорения груза массой m_1. $F = 0{,}5$ Н, $m_1 = 0{,}4$ кг, $m_2 = 0{,}6$ кг. Нить нерастяжима. Трение в оси блока отсутствует. Массами блока и нити пренебречь.



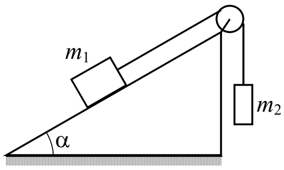
2.62. Во сколько n раз уменьшится величина ускорения груза массой m после пережигания нити, соединяющей грузы массами $2m$ и $3m$? Нити нерастяжимы. Трение в оси блока отсутствует. Массами блока и нитей пренебречь.



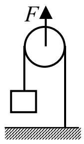
2.63. Грузы 1 и 2 связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Масса каждого груза m, сила натяжения нити $(3/5)mg$. Определите коэффициент трения μ между грузом 1 и горизонтальной плоскостью. Массами блока и нити пренебречь. Трение в оси блока отсутствует.



2.64. Два бруска, связанные легкой нитью, перекинутой через блок, находятся в равновесии. Поверхность клина гладкая. Угол $\alpha = 30^0$. Масса $m_1 = 1$ кг. Определите массу m_2 и силу T натяжения нити.



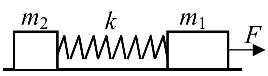
2.65. ** К одному концу нити, перекинутой через блок, подвешено тело массой $m = 2$ кг. Другой конец нити, свисающий вертикально, прикрепили к полу. Какую силу F нужно приложить к оси блока, чтобы он поднимался относительно пола с ускорением $a = 3$ м/с^2? Трением в оси блока, его массой и массой нити пренебречь.



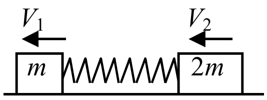
2.66. ** Через легкий блок, прикрепленный к потолку спортивного зала, перекинута легкая веревка, по свешивающимся концам которой поднимаются вверх два гимнаста. Первый гимнаст массой $m_1 = 63$ кг приближается к потолку с постоянной скоростью. С каким ускорением a относительно земли поднимается второй гимнаст массой $m_2 = 60$ кг?

2.67. * По канату в спортивном зале скользит вниз с ускорением $a = 2$ м/с школьник массой $M = 50$ кг. Масса каната $m = 10$ кг. Найдите величину T силы натяжения каната вблизи точки подвеса.

2.68. * Два бруска массами $m_1 = 0{,}6$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг, соединенные легкой пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м, перемещают по гладкому горизонтальному столу силой $F = 1$ Н, направленной вдоль оси пружины. Определите отношение a_1/a_2 ускорений брусков в момент времени, когда удлинение пружины $\Delta l = 2$ мм.

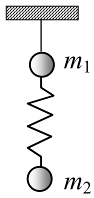


2.69. * Две шайбы массами m и $2m$, соединенные легкой пружиной, движутся вдоль одной прямой по горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени скорости шайб направлены одинаково, причем легкая шайба движется замедленно с ускорением $a_1 = 2$ м/с^2. Растянута или сжата пружина в этот момент времени? Определите в этот момент величину a_2 и направление вектора ускорения тяжелой шайбы. Коэффициент трения между каждой шайбой и поверхностью $\mu = 0{,}4$.

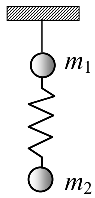


2.70. * Две шайбы массами m и $2m$, соединенные легкой пружиной, движутся вдоль одной прямой по горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени скорости шайб направлены навстречу друг другу, причем легкая шайба движется замедленно с ускорением $a_1 = 2$ м/с^2. Растянута или сжата пружина в этот момент времени? Определите в этот момент величину a_2 и направление вектора ускорения тяжелой шайбы. Коэффициент трения между каждой шайбой и поверхностью $\mu = 0{,}4$.

2.71. * Грузы массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, соединенные легкой пружиной, подвесили на нерастяжимой нити, как показано на рисунке. Нижний груз сместили из положения равновесия вверх на некоторое расстояние и отпустили. Он начал двигаться с ускорением $a = 4$ м/с^2. Чему равна сила натяжения нити T в этот момент времени?

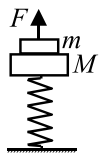


2.72. * Грузы массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, соединенные легкой пружиной, подвесили на нерастяжимой нити, как показано на рисунке. Нижний груз сместили из положения равновесия вниз на некоторое расстояние и отпустили. Он начал двигаться с ускорением $a = 4$ м/с^2. Чему равна сила натяжения нити T в этот момент времени?

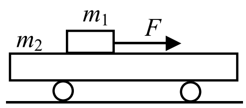


2.73. * На подставке лежит груз массой $m = 2$ кг, прикрепленный к нерастянутой вертикально подвешенной пружине жесткостью $k = 144$ Н/м. Подставку начинают перемещать вертикально вниз с ускорением $a = 1$ м/с^2. Через какое время τ груз оторвется от подставки?

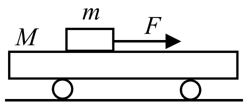
2.74. * На легкой вертикальной пружине закреплена подставка массы M, на подставке лежит груз массы m. Система находится в равновесии. Какую минимальную силу F нужно приложить к грузу, чтобы сразу оторвать его от подставки?



2.75. * На горизонтальном столе покоится тележка, на тележке - брусок. На брусок начинают действовать в горизонтальном направлении с постоянной силой $F = 8$ Н, в результате чего тележка начинает двигаться с ускорением $a_2 = 2$ м/с^2. С каким ускорением a_1 движется брусок? Масса бруска $m_1 = 1$ кг, масса тележки $m_2 = 2$ кг. Трением качения пренебречь.

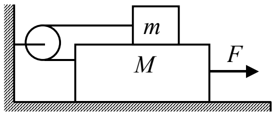


2.76. * На горизонтальном столе покоится тележка, на тележке - брусок. На брусок начинают действовать в горизонтальном направлении с постоянной силой F, в результате чего тележка и брусок начинают двигаться относительно стола с различающимися в n = 2 раза ускорениями. Найдите силу F, если масса бруска m = 1 кг, масса тележки M = 2 кг, коэффициент трения бруска о поверхность тележки μ = 0,5. Трением качения пренебречь.

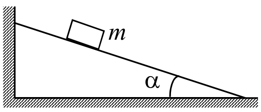


2.77. ** На длинную доску массой M = 4 кг, скользящую по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0 = 5 м/с, опускают сверху брусок массой m = 1 кг. Через какое время t скольжение бруска относительно доски прекратится? Коэффициент трения бруска о поверхность доски μ = 0,5.

2.78. ** В системе, изображенной на рисунке, массы брусков m = 1 кг, M = 2 кг. Масса блока и трение в оси пренебрежимо малы. Какую силу F нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он двигался с ускорением $a = g/2$? Коэффициент трения между всеми соприкасающимися поверхностями μ = 0,3.



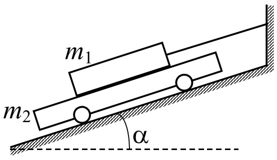
2.79. ** На гладкой горизонтальной поверхности лежит прямоугольный клин с углом при основании $\alpha = 15^0$, упираясь торцом в неподвижную вертикальную стенку. По верхней грани клина соскальзывает без трения брусок массой m = 0,2 кг. Найдите величину F силы нормального давления клина на стенку.



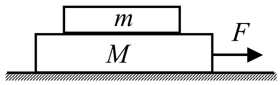
2.80. * По наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 60^0$ скользит доска массой m = 0,5 кг с положенным на нее бруском массой $2m$. Определите величину F суммарной силы трения, действующей на доску. Коэффициент трения между доской и плоскостью μ_1 = 0,1, между бруском и доской μ_2 = 0,05.

2.81. * На наклонную плоскость с углом наклона к горизонту $\alpha = 5^0$ осторожно положили доску массой m = 1 кг, а на нее – брусок массой $2m$. Определите величину F суммарной силы трения, действующей на доску. Коэффициент трения между доской и плоскостью μ_1 = 0,3, а между бруском и доской μ_2 = 0,4.

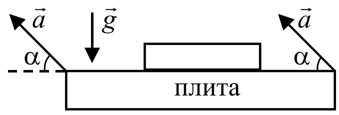
2.82. * Каким должен быть коэффициент трения μ между бруском и тележкой, чтобы система, изображенная на рисунке, оставалась в покое? Нить параллельна наклонной плоскости и составляет угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом. Масса бруска $m_1 = 2$ кг, масса тележки $m_2 = 1$ кг. Трением между тележкой и наклонной плоскостью пренебречь.



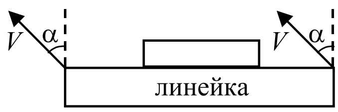
2.83. * На горизонтальном столе находятся два бруска. Масса нижнего бруска $M = 1$ кг, верхнего $m = 200$ г, коэффициент трения между брусками $\mu_1 = 0{,}5$, между бруском и столом $\mu_2 = 0{,}3$. К нижнему бруску прикладывают горизонтальную силу F. Найдите максимальное значение этой силы $F_{\max}$, при котором бруски будут двигаться по столу как единое целое.



2.84. * На неподвижной горизонтально расположенной плите покоится брусок. Плиту начинают двигать поступательно с ускорением a под углом α вверх к горизонту. При каком коэффициенте трения μ между бруском и плитой оба тела будут двигаться как единое целое?



2.85. ** На горизонтальном столе лежат, соприкасаясь, брусок и линейка. Линейку двигают поступательно по столу с постоянной скоростью в направлении, определяемом углом α (см. рис., вид на стол сверху), толкая брусок. При $\alpha \leq \alpha_m = 30^0$ брусок и линейка перемещаются по столу как единое целое, а при $\alpha > \alpha_m$ брусок скользит по линейке. Найдите коэффициент трения $\mu_Л$ между бруском и линейкой.



2.4. Динамика движения по окружности

Движение материальной точки по окружности всегда происходит с ускорением. Если величина скорости остается постоянной, то вектор ускорения в любой момент времени направлен к центру окружности, а модуль этого вектора равен

$$a_{цс} = V^2 / R .$$

При неравномерном движении по окружности кроме центростремительного ускорения возникает также составляющая ускорения, направленная по касательной к траектории. Однако и в этом случае проекция вектора ускорения на ось, направленную от материальной точки к центру окружности, равна $a_{цс}$. Именно на такую ось удобно проектировать векторные величины при записи второго закона Ньютона.

<u>Примеры решения задач</u>

<u>Пример 2. 17.</u> Определите высоту H круговой орбиты спутника над поверхностью Земли, если его скорость на этой орбите V = 6,4 км/с. Радиус Земли R = 6400 км. Ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли считать равным g = 10 м/с^2.

<u>Решение</u>

На спутник действует единственная сила – сила притяжения к Земле (рис.2.23). По закону всемирного притяжения величина этой силы

$$F = G\frac{mM}{(R+H)^2} ,$$

где G – гравитационная постоянная, m – масса спутника, M – масса Земли. Выбирая ось x, направленную по радиусу круговой орбиты от спутника к центру Земли, запишем второй закон Ньютона для проекций векторных величин на эту ось

$$x: \quad ma_{цс} = F ,$$

где

$$a_{цс} = \frac{V^2}{R+H} .$$

Из этих уравнений получим

$$m\frac{V^2}{R+H} = G\frac{mM}{(R+H)^2} .$$

Учтем также, что

$$g = G\frac{M}{R^2} .$$

Окончательно получим

$$H = R\left(\frac{Rg}{V^2} - 1\right) = 3600 \text{ км.}$$

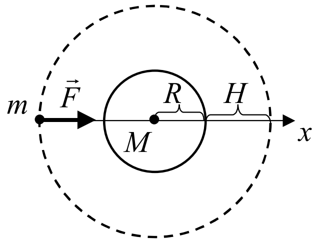


Рис. 2.23.

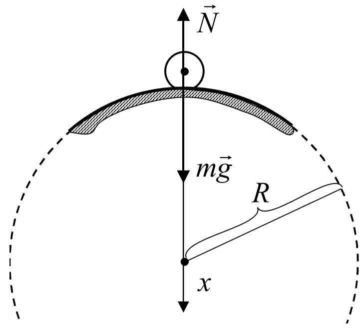


Рис. 2.24.

<u>Пример 2. 18.</u> С какой скоростью V движется велосипедист по выпуклому мосту с радиусом кривизны R = 45 м, если в верхней точке моста давление на дорогу в n = 2 раза меньше, чем при движении на горизонтальном участке?

<u>Решение</u>

На велосипедиста действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. В верхней точке моста эти силы действуют вдоль одной прямой в противоположных направлениях (рис.2.24) и сообщают велосипедисту центростремительное ускорение. Выбирая ось x, направленную по радиусу окружности к ее центру, запишем второй закон Ньютона

$$x: \quad m\frac{V^2}{R} = mg - N .$$

Сила давления велосипедиста на дорогу P (его вес) равна по третьему закону Ньютона силе реакции опоры N:

$$P = mg - m\frac{V^2}{R} .$$

На горизонтальном участке дороги центростремительное ускорение равно нулю и вес велосипедиста $P_0 = mg$. По условию задачи

$$P = P_0 / n = mg / n .$$

Следовательно,

$$\frac{mg}{n} = mg - m\frac{V^2}{R}.$$

Отсюда получим

$$V = \sqrt{gR(n-1)/n} = 15 \text{ м/с}.$$

<u>Пример 2. 19.</u> На легкой нерастяжимой нити длиной $l = 90$ см подвешен груз массы $m = 100$ г. Грузу сообщили некоторую скорость, после чего он стал двигаться по окружности в вертикальной плоскости. Скорость груза в момент прохождения точки A (рис.2.25) равна $V = 3$ м/с. Найдите силу натяжения нити T и ускорение груза a в этот момент времени.

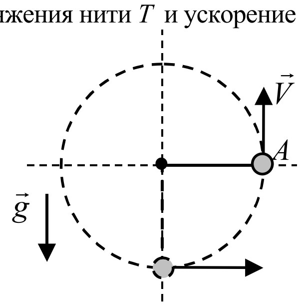


Рис. 2.25.

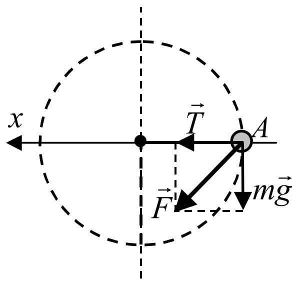


Рис. 2.26.

<u>Решение</u>

На груз действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Выбирая ось x, как показано на рис.2.26, запишем второй закон Ньютона

$$x: \quad m\frac{V^2}{l} = T.$$

Подставляя численные значения, найдем $T = 1$ Н. Модуль результирующей силы F, действующей на груз, найдем при помощи теоремы Пифагора:

$$F = \sqrt{T^2 + (mg)^2}.$$

Вектор полного ускорение груза по второму закону Ньютона равен $\vec{a} = \vec{F}/m$, а модуль этого вектора

$$a = \sqrt{(V^2/l)^2 + (g)^2} \approx 14 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что в данном случае сила натяжения нити сообщает грузу центростремительное ускорение, обуславливая поворот вектора скорости, а сила тяжести приводит к возникновению составляющей ускорения, направленной по касательной к траектории. Это ускорение называют касательным или тангенциальным, с ним связано изменение величины скорости.

Пример 2. 20. Шарик массой m = 100 г, подвешенный на легкой нити, равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости (рис.2.27) с ускорением a = 3/4 g. Найдите силу натяжения нити T.

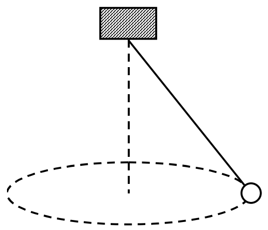


Рис. 2.27.

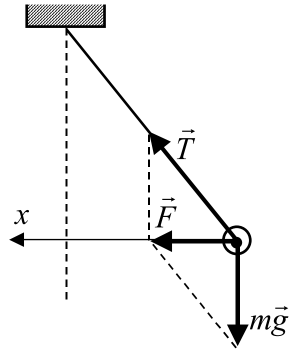


Рис. 2.28.

Решение

При равномерном движении шарика по окружности вектор его ускорения направлен по радиусу окружности к ее центру. Так же направлен и вектор результирующей силы $\vec{F}$. Этот вектор является в данном случае суммой вектора силы тяжести $m\vec{g}$ и вектора силы натяжения нити $\vec{T}$ (рис.2.28). Учитывая, что

$$ma = F\ , \qquad T^2 = (mg)^2 + F^2\ ,$$

найдем

$$T = m\sqrt{a^2 + g^2} = \frac{5}{4}mg = 1{,}25\ \text{Н}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.86. Небольшой шарик массой m движется по окружности радиусом r. Определите величину силы F, действующей на шарик, если величина импульса шарика постоянна и равна p.

2.87. Небольшой шарик равномерно движется по окружности. Определите частоту обращения шарика n, если величина действующей на шарик силы равна F, а величина его импульса p.

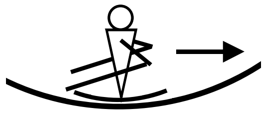
2.88. Определите первую космическую скорость v_1 спутника планеты, масса и радиус которой в два раза больше, чем у Земли. Радиус Земли $R_з = 6400$ км.

2.89. Определите скорость v спутника, движущегося по круговой орбите на высоте $H = 3600$ км над поверхностью Земли. Радиус Земли $R_з = 6400$ км.

2.90. С какой скоростью v относительно Земли должен приблизиться транспортный корабль "Прогресс" к международной космической станции (МКС), движущейся по круговой орбите на высоте $H = 400$ км над поверхностью Земли, чтобы его стыковка со станцией прошла штатно (без удара и перекоса)? Радиус Земли $R_з = 6400$ км.

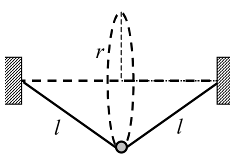
2.91. * Найдите длительность T суток на сферической планете радиуса R, зная, что тела на ее экваторе невесомы. Ускорение свободного падения на полюсе этой планеты равно g.

2.92. Определите вес P лыжника массой $m = 80$ кг в нижней точке вогнутого участка дороги с радиусом кривизны $R = 20$ м, если скорость лыжника в этой точке v = 5 м/с.

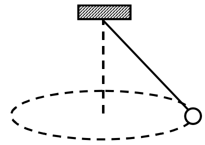


2.93. На легкой нерастяжимой нити длиной $l = 125$ см подвешен груз массы $m = 50$ г. Грузу сообщили некоторую скорость после чего он стал двигаться по окружности в вертикальной плоскости. Скорость груза в момент прохождения верхней точки траектории равна $V = 5$ м/с. Найдите силу натяжения нити T в этот момент времени.

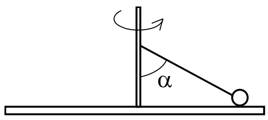
2.94. Небольшой шарик массы m, закрепленный в средней точке легкой нерастяжимой нити длины $2l$, свободно вращается в вертикальной плоскости, двигаясь по окружности радиуса r. Концы нити закреплены на одной горизонтали (см. рис.). Скорость шарика в момент прохождения нижней точки траектории равна V. Найдите силу натяжения нити T в этот момент. Ускорение свободного падения равно g.



2.95. Шарик подвешен на нити длиной $l = 50$ см. Во сколько раз увеличится сила натяжения нити, если шарик раскрутить по окружности радиуса $R = 30$ см в горизонтальной плоскости?



2.96. * Шарик, закрепленный на нити, движется по окружности на гладком горизонтальном столе. Нить составляет угол $\alpha = 60^0$ с вертикальной осью вращения, период обращения $T = 2$ с, длина нити $l = 50$ см, масса шарика $m = 50$ г. С какой силой F шарик действует на стол?

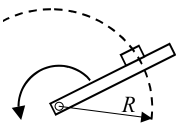


2.97. * Маленький камушек лежит на вершине закрепленного шара радиуса $R = 14$ см. Какую горизонтальную скорость v_0 нужно резким ударом сообщить камешку, чтобы он оторвался от шара сразу на его вершине?

2.98. * С какой скоростью V должен двигаться шарик по внутренней гладкой поверхности сферы радиусом $R = 30$ см, чтобы все время оставаться в горизонтальной плоскости на высоте $H = 12$ см от нижней точки сферы?

2.99. * Шайбу, находящуюся на горизонтальном столе, тянут за нить так, что она движется по окружности радиуса $r = 0{,}5$ м с постоянной скоростью $V = 1$ м/с. При этом нить все время параллельна поверхности стола и составляет угол $\alpha = 45^0$ с вектором скорости шайбы. Определите коэффициент трения μ между столом и шайбой.

2.100. ** Расположенную на горизонтальном столе линейку вращают с частотой $n = 0{,}5$ с$^{-1}$ вокруг одного из ее концов, толкая по столу небольшой брусок. Найдите максимальное расстояние R_m от бруска до оси вращения, при котором брусок и линейка будут двигаться как единое целое. Коэффициент трения между бруском и столом $\mu_С = 0{,}5$, между бруском и линейкой $\mu_Л = 0{,}4$.



2.5. Статика и гидростатика

Статикой называется раздел механики, изучающий условия равновесия тел - условия, при выполнении которых все точки механической системы находятся в покое в рассматриваемой системе отсчета. Если тело находится в равновесии, то для любой малой частицы этого тела должно выполняться уравнение $\Delta m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = 0$, где $\vec{F}_i$ - векторная сумма всех сил, действующих на данную частицу, Δm_i - ее масса, $\vec{a}_i$ - ускорение. Кроме того, в какой-то начальный момент времени скорости всех частиц тела должны быть равны нулю. Полученная система уравнений в общем случае весьма сложна для решения, так как необходимо учесть все силы взаимодействия между частицами тела, а также внешние силы, действующие на данное тело со стороны других тел. Однако для твердого тела удается получить два следующих условия равновесия.

Во-первых, для равновесия необходимо, чтобы векторная сумма всех внешних сил, действующих на тело, была равна нулю:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{р}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0},$$

При выполнении этого условия, по крайней мере, одна точка тела, его центр масс, будет находиться в равновесии (если эта точка покоилась в какой-то начальный момент времени).

Во-вторых, для равновесия необходимо, чтобы была равной нулю алгебраическая сумма моментов всех внешних сил, действующих на тело, относительно какой-либо оси:

$$\boxed{M_1 + M_2 + M_3 + \ldots = 0}\ .$$

Моментом M силы F называется величина равная произведению модуля силы на плечо силы:

$$\boxed{|M| = Fd}.$$

Плечо d силы равно длине перпендикуляра, проведенного от оси вращения до линии действия силы (это кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения). Момент силы характеризует вращающее действие силы относительно выбранной оси. Положительными считаются моменты тех сил, которые стремятся повернуть тело против часовой стрелки.

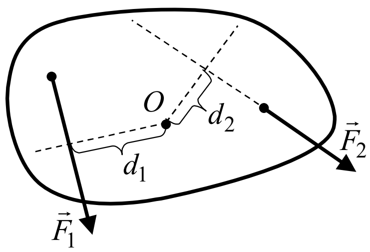


Рис. 2.29.

На рис.2.29 изображено тело, которое может вращаться вокруг оси O, перпендикулярной плоскости чертежа. На рисунке указаны приложенные к телу силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, а также плечи этих сил d_1 и d_2. Суммарный момент этих сил относительно оси O равен

$$M = F_1 d_1 - F_2 d_2 .$$

Гидростатика. На тело, погруженное в жидкость или газ, действуют силы, распределенные по поверхности тела. Для описания таких распределенных сил вводится новая физическая величина – давление. Давление определяется как отношение модуля силы $\vec{F}$, действующей перпендикулярно поверхности, к площади S этой поверхности:

$$P = F / S .$$

Давление можно определить для каждой бесконечно малой площадки в жидкости или газе. Выяснилось, что давление не зависит от ориентации этой площадки (закон Паскаля). Поэтому давление является скалярной величиной, определенной для каждой точки жидкости или газа. В системе СИ давление измеряется в паскалях (Па).

Давление в жидкости зависит от глубины и давления газа над поверхностью жидкости. Рассмотрим некоторый мысленно выделенный цилиндрический столбик жидкости высотой h с площадью основания S (рис.2.30). Поскольку столбик жидкости находится в равновесии, то

$$mg + P_0 S = PS ,$$

где $m = \rho h S$ - масса жидкости в выделенном объеме, ρ - плотность жидкости, P_0 – давление газа над жидкостью, P – давление жидкости на глубине h. Отсюда следует

$$\boxed{P = P_0 + \rho g h} .$$

Давление $\rho g h$ называют гидростатическим давлением.

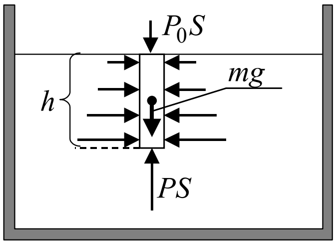


Рис. 2.30.

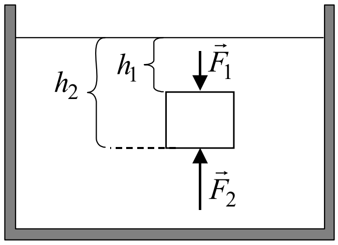


Рис. 2.31.

Из-за разности давлений в жидкости на разных уровнях возникает выталкивающая или архимедова сила $\vec{F}_A$. Рассмотрим в качестве простого примера погруженное в жидкость тело в виде цилиндра высотой h с площадью основания S (рис.2.31). Разность сил давления на нижнее и верхнее основания равна

$$F_2 - F_1 = P_2S - P_1S = \rho g(h_2 - h_1)S\ .$$

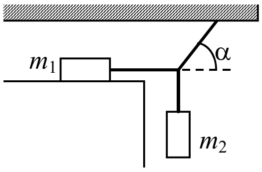
Но $(h_2 - h_1)S = V$ - объем погруженной части тела (объем вытесненной жидкости). Таким образом, выталкивающая сила направлена вверх и равна

$$\boxed{F_A = \rho gV}\ .$$

Эта формула, выражающая закон Архимеда, справедлива для тела произвольной формы, которое погружено в жидкость или газ.

<u>Примеры решения задач</u>

<u>Пример 2. 21.</u> В системе, изображенной на рисунке, масса груза m_1 = 1,6 кг, коэффициент трения между этим грузом и горизонтальной поверхностью μ = 0,25. Одна нить горизонтальна, другая вертикальна, третья нить составляет с горизонтом угол α = 45°. При какой максимальной массе груза m_2 система будет находиться в равновесии?



<u>Решение</u>

На рис.2.32 изобразим силы, действующие на грузы, а также силы, приложенные к узлу O. Так как грузы находятся в равновесии, то

$$T_1^{'} = F_{\text{тр}}, \quad N_1 = m_1g\ , \quad T_2^{'} = m_2g\ .$$

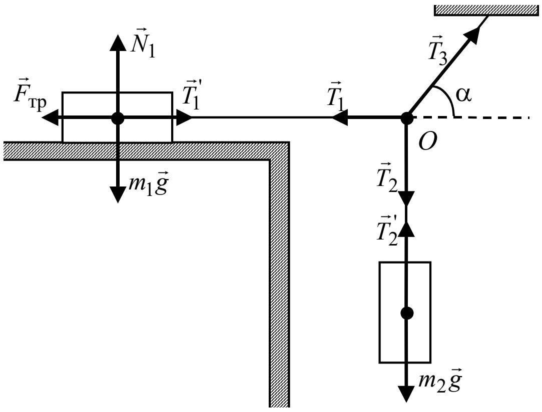


Рис. 2.32.

Векторная сумма сил, приложенных к узлу O, равна нулю. Следовательно,

$$T_3 \cos\alpha - T_1 = 0,$$

$$T_3 \sin\alpha - T_2 = 0.$$

Учтем также, что

$$T_1' = T_1, \quad T_2' = T_2.$$

При постепенном увеличении массы груза m_2 равновесие системы нарушится, когда сила трения достигнет своей максимальной величины

$$F_{тр} = \mu N_1.$$

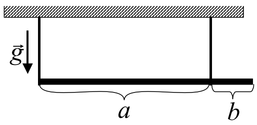
Из записанных выше уравнений получим

$$\frac{T_3 \sin\alpha}{T_3 \cos\alpha} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 g}{\mu m_1 g},$$

откуда

$$m_2 = \mu m_1 \mathrm{tg}\alpha = 0{,}4 \text{ кг}.$$

Пример 2. 22. Однородный стержень массой $m = 1$ кг подвешен на двух нитях одинаковой длины, как показано на рисунке. Определите силы натяжения нитей, если $a = 80$ см, $b = 20$ см.



Решение
Силы, действующие на стержень, изображены на рис.2.33 (силу тяжести mg всегда следует прикладывать к центру масс тела – только в этом случае момент силы mg, равен суммарному моменту всех сил тяжести, действующих на отдельные части тела). При равновесии векторная сумма всех сил, действующих на стержень, равна нулю. Следовательно

$$T_1 + T_2 - mg = 0 .$$

Кроме того, в равновесии суммарный момент всех сил относительно любой оси равен нулю (в равновесии стержень не вращается относительно любой оси). В качестве оси вращения выберем ось O, проходящую через середину стержня перпендикулярно нитям и стержню. Тогда:

$$T_2 d_2 - T_1 d_1 = 0 .$$

Плечи сил, как видно из рисунка, равны

$$d_1 = \frac{a+b}{2}, \quad d_2 = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} .$$

После простых преобразований получим

$$T_1 = \frac{mg(a-b)}{2a} = 3{,}75 \text{ Н}, \quad T_2 = \frac{mg(a+b)}{2a} = 6{,}25 \text{ Н}.$$

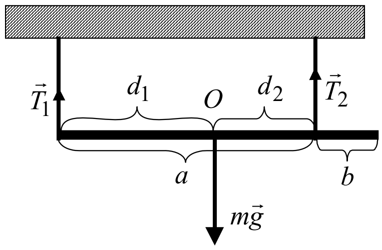


Рис. 2.33.

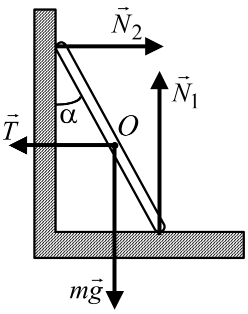


Рис. 2.34.

Пример 2. 23. Однородная палочка массой m опирается на скользкий прямой угол, образуя с вертикалью угол α. Палочка удерживается в этом положении горизонтальной нитью, прикрепленной к ее середине. Найдите силу натяжения нити T.

Решение

Силы, действующие на палочку, изображены на рис.2.34. При равновесии векторная сумма всех сил, действующих на палочку, равна нулю: $m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T} = 0$. Для проекций сил на горизонтальную и вертикальную оси можно записать:

$$0 = N_2 - T\ ,$$

$$0 = N_1 - mg\ .$$

Кроме того, равен нулю суммарный момент всех сил, действующих на палочку. Удобно в качестве оси вращения выбрать ось *O*, проходящую через середину палочки и перпендикулярную плоскости чертежа. Моменты сил тяжести и натяжения нити относительно этой оси равны нулю, так как плечо каждой из этих сил равно нулю. Момент силы $\vec{N}_1$ относительно оси *O* равен

$$M_1 = N_1(l/2)\sin\alpha\ ,$$

где l – длина палочки, а момент силы $\vec{N}_2$ равен

$$M_2 = -N_2(l/2)\cos\alpha$$

(момент M_2 отрицателен, поскольку сила $\vec{N}_2$ стремится повернуть тело по часовой стрелке). Итак, суммарный момент равен нулю:

$$N_1\frac{l}{2}\sin\alpha - N_2\frac{l}{2}\cos\alpha = 0\ .$$

Из записанных выше уравнений найдем

$$\frac{T}{mg} = \frac{N_2}{N_1} = \mathrm{tg}\alpha\ .$$

Отсюда

$$T = mg\,\mathrm{tg}\alpha\ .$$

Пример 2. 24. Льдина постоянной толщины плавает в воде, выступая на $H = 4$ см над поверхностью воды. Определите массу льдины m, если ее площадь $S = 50$ м^2. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3.

Решение

Действующая на льдину сила тяжести уравновешена силой Архимеда:

$$mg = F_A = \rho_л gV\ ,$$

где V – объем погруженной части льдины. Для массы льдины можно также записать

$$m = \rho_в (V + SH) .$$

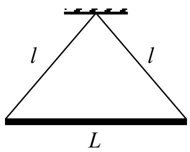
Решая полученную систему уравнений, найдем

$$m = \rho_в \rho_л SH / (\rho_в - \rho_л) = 18 \text{ т}.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

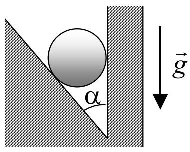
2.101. Подвешенный на нити груз массой m = 40 г отвели в сторону горизонтальной силой F = 0,3 Н. Определите силу натяжения нити T.

2.102. Однородный стержень длиной L = 1,2 м висит на двух легких нитях длиной l = 1 м каждая. Сила натяжения каждой нити T = 5 Н. Определите массу m стержня.



2.103. К середине легкой нерастяжимой нити, прикрепленной двумя концами к потолку, подвешен груз массой m = 1 кг. Длина нити L = 1 м, расстояние между ее концами l = 0,6 м. Определите величину T силы натяжения нити.

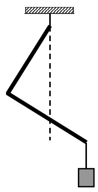
2.104. * Однородный гладкий шар положили в угол, как показано на рисунке. Определите силу F, с которой шар действует на вертикальную стенку. Масса шара m = 1 кг, угол $\alpha = 30^0$. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



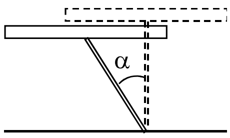
<u>Момент сил</u>

2.105. Неравноплечные весы находятся в равновесии. Если на их левую чашку положить груз, то он уравновешивается гирями массой m_1 = 900 г на правой чашке. Если этот же груз положить на правую чашку, убрав гири, то он уравновешивается гирями массой m_2 = 400 г на левой чашке. Определите массу m груза.

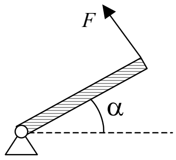
2.106. ** Стержень массой m_1 = 4 кг согнули посередине под прямым углом и подвесили на нити, привязанной к одному из концов. Найдите массу m_2 груза, который следует прикрепить к другому концу стержня, чтобы середина нижней половины стержня оказалась на одной вертикали с точкой подвеса.



2.107. ** Карандаш поставили вертикально на стол и придавили массивной книгой, придерживая ее в горизонтальной плоскости. На какой максимальный угол можно отклонить карандаш от вертикали до его падения на стол за счет медленного и поступательного перемещения книги? Коэффициент трения между карандашом и столом $\mu_1 = 0{,}5$, между карандашом и книгой $\mu_2 = 0{,}2$. Принять, что действующая на карандаш сила тяжести значительно меньше силы, которая прижимает карандаш к столу.

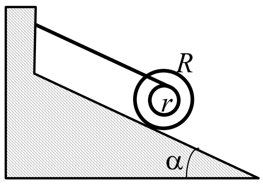


2.108. ** Однородный стержень массы $m = 1$ кг может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. С какой по величине силой f стержень действует на эту ось, если его неподвижно удерживают под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту, прикладывая к верхнему концу силу, перпендикулярную стержню?



2.109. ** Анатолий и Борис несут бревно, медленно поднимаясь по лестнице. Анатолий идет первым, прикладывая к верхнему концу бревна минимально возможную для его удержания силу. Во сколько раз большую силу должен прикладывать Борис к нижнему концу бревна? Бревно однородное и составляет угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом.

2.110. ** На наклонной плоскости при помощи нити удерживается катушка. Предельный угол наклона плоскости к горизонту, при котором катушка остается в покое, равен α. Определите коэффициент трения μ между катушкой и плоскостью. Внутренний радиус катушки r, внешний R. Ось катушки горизонтальна, нить параллельна наклонной плоскости.



Гидростатика

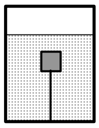
2.111. Тело, плавая в керосине, погружается на $\delta_1 = 3/4$ своего объема. Какая часть δ_2 объема тела окажется погруженной, если его опустить в воду? Плотность керосина $\rho_1 = 800$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 1000$ кг/м^3.

2.112. Полено объемом $V = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м^3 и плотностью ρ = 800 кг/м^3 плавает в воде. Какой объем V_1 полена находится над поверхностью воды? Плотность воды $\rho_В$ = 1000 кг/м^3.

2.113. Сплошной однородный шар, до половины погруженный в воду, лежит на дне сосуда и давит на него с силой, равной одной трети действующей на шар силы тяжести. Будет ли плавать этот шар в глубоком сосуде, заполненном водой? Ответ обосновать. Плотность воды $\rho_В$ = 1000 кг/м^3.

2.114. * Полярники на дрейфующей льдине толщиной d = 5 м пробурили скважину, чтобы достать воду. Какой длины l веревка им понадобится? Плотность воды $\rho_В$ = 1000 кг/м^3, плотность льда $\rho_Л$ = 900 кг/м^3.

2.115. * В цилиндрическом стакане с помощью прикрепленной к его дну нити удерживается полностью погруженным в воду кубик льда. Определите силу натяжения T нити, если известно, что после того, как лед растаял, уровень воды в стакане понизился на ΔH. Площадь поперечного сечения стакана S, плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.



2.116. ** С какими силами N давит на гладкую боковую поверхность цилиндрического стакана однородная палочка массы m = 40 г, наполовину погруженная в воду? Угол наклона палочки к горизонту равен α = 45^0.