# 3. Законы сохранения в механике

## 3.1. Импульс тела. Закон сохранения импульса

1. Импульсом $\vec{p}$ материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы материальной точки $m$ на вектор ее скорости $\vec{V}$:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{V}}.$$

Второй закон Ньютона в строгой формулировке записывается в виде

$$\boxed{\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F} \text{ при } \Delta t \to 0},$$

где $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ - изменение импульса за малое время $\Delta t$. Только в том случае, когда масса тела остается постоянной при движении, второй закон Ньютона можно записать в виде $m\vec{a} = \vec{F}$. Действительно, при $m = \text{const}$ изменение импульса $\Delta\vec{p} = m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = m\Delta\vec{V}$. Тогда

$$\Delta\vec{p} / \Delta t = m\Delta\vec{V} / \Delta t = m\vec{a} = \vec{F}.$$

Импульсом $\vec{P}$ системы материальных точек называют векторную сумму импульсов всех материальных точек, входящих в систему:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + ...$$

2. Все силы, действующие на тела системы, можно разделить на два класса: 1) внутренние силы – силы взаимодействия между телами, входящими в систему, 2) внешние силы – силы, действующие на тела системы со стороны тел, которые в систему не входят. Выбор системы материальных точек произволен (как произволен, например, выбор координатных осей). Однако после того как система выбрана, все силы распадаются на два класса: внешние и внутренние.

Для каждой материальной точки, входящей в систему, можно записать второй закон Ньютона, а затем просуммировать полученные уравнения. В результате получим

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 ...) + (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{31} + ...),$$

где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, … - внешние силы, $\vec{f}_{12}$, $\vec{f}_{21}$, $\vec{f}_{13}$,... - внутренние силы: $\vec{f}_{12}$ - сила, действующая на первую частицу со стороны второй, $\vec{f}_{21}$ - сила, действующая на вторую частицу со стороны первой и т.д.. По третьему закону Ньютона силы взаимодействия между телами равны по модулю и противоположно направлены:

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}, \quad \vec{f}_{13} = -\vec{f}_{31}, \ldots.$$

Поэтому в правой части записанного выше уравнения остается сумма только внешних сил:

$$\boxed{\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \ldots}\,.$$

Это уравнение является важным обобщением второго закона Ньютона для системы материальных точек. Из уравнения следует, что суммарный импульс системы изменяется только под действием внешних сил. Внутренние силы (силы взаимодействия между телами системы) не могут изменить суммарный импульс системы.

3. Система материальных тел называется <u>замкнутой</u>, если векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю. Для таких систем $\Delta \vec{P} / \Delta t = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = 0$. Это означает, что импульс замкнутой системы тел остается постоянным.

Таким образом, мы приходим к <u>формулировке закона сохранения импульса</u>: в замкнутой системе векторная сумма импульсов всех тел, входящих в систему, остается постоянной при любых взаимодействиях тел этой системы между собой.

## <u>Примеры решения задач</u>

**<u>Пример 3. 1.</u>** Шарик массой $m$ подлетает по направлению нормали к стенке со скоростью $V$, ударяется о нее и отскакивает с такой же по величине скоростью. С какой средней силой $F$ действовал шарик на стенку, если продолжительность удара равна $\Delta t$?

<u>Решение</u>

Пусть ось $x$ направлена по нормали к стенке (рис.3.1). Тогда по второму закону Ньютона

$$\frac{p_{2x} - p_{1x}}{\Delta t} = f_x,$$

где $p_{1x}$ и $p_{2x}$ - проекции импульса шарика на ось $x$ до и после удара, $f_x$ - проекция на ось $x$ силы, действующей на шарик со стороны стенки во время удара. Учитывая, что $p_{1x} = mV$, $p_{2x} = -mV$, получим $f_x = -2mV / \Delta t$. По третьему закону Ньютона со стороны шарика на стенку во время удара действовала сила

$$F_x = -f_x = 2mV / \Delta t.$$

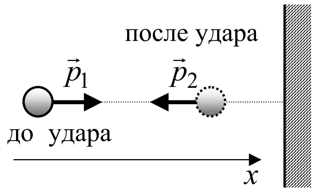



Рис. 3.1.

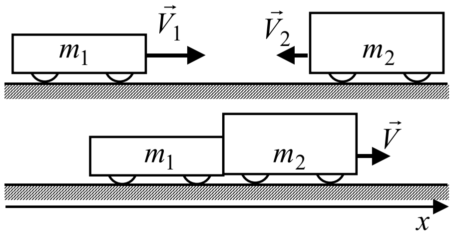



Рис. 3.2.

**<u>Пример 3. 2.</u>** На горизонтальной поверхности сталкиваются две тележки массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 4$ кг, движущиеся навстречу друг другу со скоростями $V_1 = 2$ м/с и $V_2 = 0{,}5$ м/с. При ударе тележки сцепляются и движутся далее, как единое целое (такой удар называют <u>абсолютно неупругим</u>). Определите скорость $V$ совместного движения тележек после столкновения.

<u>Решение</u>

Импульс системы двух тележек в результате соударения не изменился:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}.$$

Для проекций векторных величин на ось $x$ получим:

$$x: \qquad m_1V_1 - m_2V_2 = (m_1 + m_2)V_x,$$

где $V_x$ - проекция скорости тележек после соударения на горизонтальную ось $x$ (см. рис.3.2). Следовательно

$$V_x = \frac{m_1V_1 - m_2V_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{3} \text{ м/с}.$$

**Пример 3. 3.** Тележка с песком массой $M$ движется по горизонтальной поверхности со скоростью $V_1$. На тележку вертикально падает груз массой $m$ и застревает в песке. С какой скоростью $V$ после этого будет двигаться тележка?

Решение

Рассматривая систему «тележка-груз», заметим, что внешние силы, действующие на эту систему (силы тяжести и реакции опоры), направлены вертикально. Поэтому проекции внешних сил на горизонтальную ось $x$, вдоль которой движется тележка, равны нулю и, следовательно, проекция импульса системы на ось $x$ не изменяется:

$$x: \qquad MV_1 = (M+m)V \ .$$

Отсюда

$$V = \frac{MV_1}{M+m} \ .$$

**Пример 3. 4.** Тележка с песком массой $M$ = 20 кг движется по горизонтальной поверхности со скоростью $V_1$ = 1 м/с. В тележку попадает камень массой $m$ = 0,5 кг и застревает в песке. Вектор скорости камня $\vec{V}_2$ непосредственно перед ударом составляет угол $\alpha = 60^0$ с вектором $\vec{V}_1$ и лежит с ним в одной вертикальной плоскости (рис.3.3), а величина скорости камня $V_2$ = 12 м/с. С какой скоростью $V$ будет двигаться тележка после соударения?

Решение

Направим ось $x$ горизонтально вдоль вектора скорости тележки. На систему «камень-тележка» действуют внешние силы: сила тяжести и сила реакции опоры. Проекции этих сил на ось $x$ равны нулю. Следовательно, проекция импульса системы на эту ось остается неизменной:

$$x: \quad MV_1 + mV_2\cos\alpha = (M+m)V \ .$$

Из этого уравнения найдем

$$V = \frac{MV_1 + mV_2\cos\alpha}{M+m} = 1.12 \text{ м/с.}$$

**Пример 3. 5.** Шарики массами $m_1$ и $m_2$ движутся со взаимно перпендикулярными скоростями $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. В результате столкновения первый шарик остановился. Найдите величину $V$ скорости второго шарика после удара и угол $\alpha$ между векторами $\vec{V}$ и $\vec{V}_2$.

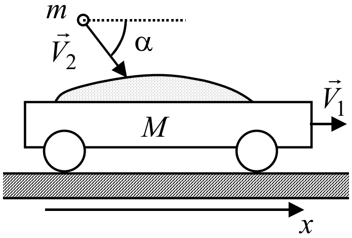



Рис. 3.3.

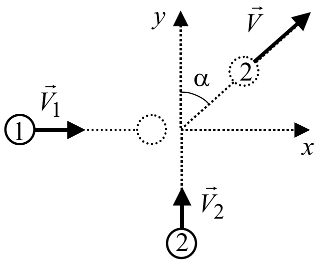



Рис. 3.4.

Решение

Считая систему шариков замкнутой, на основании закона сохранения импульса запишем

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_2\vec{V} .$$

Это векторное уравнение эквивалентно двум скалярным уравнениям для проекций векторных величин на оси $x$ и $y$ (рис.3.4):

$$x:\ m_1V_1 = m_2V_x ,$$

$$y:\ m_2V_2 = m_2V_y .$$

Получаем:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2}V_1\right)^2 + V_2^2} , \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{V_x}{V_y} = \frac{m_1V_1}{m_2V_2} .$$

**Задачи для самостоятельного решения**

Центральный удар

3.1. Шарик массой $m_1$, двигавшийся со скоростью $V_0 = 3$ м/с, столкнулся с шариком массой $m_2$, двигавшимся навстречу ему с той же скоростью. После центрального соударения шарики движутся вместе со скоростью $V = 1{,}5$ м/с в направлении первоначального движения первого шарика. Определите отношение $m_1/m_2$.

3.2. В результате центрального абсолютно неупругого столкновения частицы массы $m_1$ с первоначально покоившимся шаром массы $m_2$

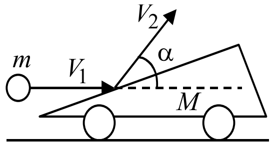
импульс частицы уменьшился на величину $\Delta p$. Определите скорость частицы перед столкновением.

3.3. Шар массы $m_1$ налетает со скоростью $V_1$ на покоящийся шар массы $m_2$. Считая удар абсолютно неупругим и центральным, найдите изменение импульса $\Delta p$ второго шара при столкновении.

3.4. В направлении стрелка по горизонтальной рельсовой дорожке движется по инерции со скоростью $V_1 = 1$ м/с тележка-мишень массой $M = 50$ кг. Сколько выстрелов $n$ должен сделать стрелок, чтобы тележка остановилась? Масса пули $m = 10$ г, ее скорость при попадании в мишень горизонтальна и равна $V_2 = 500$ м/с. Пули застревают в мишени.

Нецентральный удар

3.5. На горизонтальном столе покоится игрушечная машинка массой $M = 100$ г. В нее попадает шарик массой $m = 10$ г, скорость которого перед ударом $V_1 = 4$ м/с направлена горизонтально, а сразу после удара равна $V_2 = 2$ м/с и составляет угол $\alpha = 60^0$ с горизонтом. Найдите скорость машинки $V$ после удара. Все векторы скорости лежат в одной вертикальной плоскости.



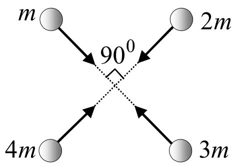

3.6. Плот массой $m_1 = 200$ кг плывет параллельно берегу озера со скоростью $V_1 = 1$ м/с. Человек массой $m_2 = 70$ кг запрыгивает на плот перпендикулярно берегу с горизонтальной скоростью $V_2 = 3$ м/с (относительно берега). Определите величину $V_3$ скорости, с которой будет двигаться плот вместе с человеком.

3.7. Снаряд, летевший со скоростью $V = 200$ м/с, разорвался на два осколка одинаковой массы. Скорость первого осколка сразу после взрыва перпендикулярна вектору $\vec{V}$ и равна $V_1 = 300$ м/с. Определите величину скорости $V_2$ второго осколка.

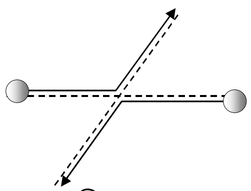
3.8. Сигнальная ракета, запущенная вертикально, разорвалась в верхней точке траектории на три осколка. Осколки массами $m_1 = 0{,}3$ кг и $m_2 = 0{,}2$ кг полетели со скоростями $V_1 = 100$ м/с и $V_2 = 200$ м/с перпендикулярно друг другу. Определите скорость $V_3$ третьего осколка массой $m_3 = 0{,}5$ кг.

3.9.* Шарики массами $m_1$, $m_2$ движутся со взаимно перпендикулярными скоростями $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. После абсолютно неупругого удара шарики движутся со скоростью $\vec{V}$ . Найдите величину $V$ этой скорости и угол $\alpha$, который составляет вектор $\vec{V}$ с вектором $\vec{V}_1$.

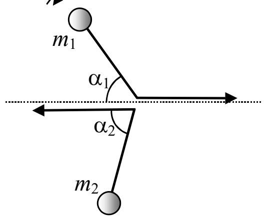
3.10. Четыре пластилиновых шарика массами $m$, $2m$, $3m$ и $4m$, скользившие по гладкому горизонтальному столу с одинаковыми скоростями v, одновременно столкнулись и слиплись. Найдите скорость $V$ образовавшегося куска пластилина.



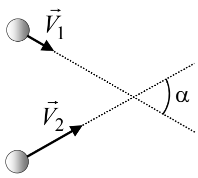

3.11.* Две шайбы в результате столкновения на гладком горизонтальном столе разлетелись в противоположных направлениях, как показано на рисунке. Во сколько раз отличались скорости шайб перед столкновением, если их массы равны $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г?



3.12.* Две шайбы в результате столкновения на гладком горизонтальном столе разлетелись в противоположных направлениях, как показано на рисунке. Во сколько раз отличались скорости шайб перед столкновением, если известны их массы $m_1$, $m_2$ и углы $\alpha_1$, $\alpha_2$?




3.13.*Два тела с одинаковыми массами свободно движутся со скоростями $V_1 = 2$ м/с и $V_2 = 4$ м/с. Угол между векторами скоростей $\alpha = 60^0$. Определите величину $V$ скорости тел после абсолютно неупругого соударения.




<u>Столкновение взаимодействующих тел</u>

3.14. По двум непроводящим параллельным стержням могут скользить две бусинки, разноименно заряженные и имеющие массы $m_1 = 0{,}2$ г и $m_2 = 0{,}4$ г. Сначала бусинки удерживают на некотором расстоянии друг от друга, а затем отпускают. Известно, что максимальная скорость первой бусинки $V_1 = 2$ м/с. Чему равна максимальная скорость $V_2$ второй бусинки? Трением и силой тяжести пренебречь.

3.15. * На гладком горизонтальном столе покоятся две шайбы массами $m$ и $2m$, соединенные легкой недеформированной пружинкой. Легкой шайбе сообщают скорость $V_0$ вдоль оси пружинки. Найдите скорость $V$ тяжелой шайбы в момент времени, когда скорость легкой шайбы, не изменив направления, уменьшится в три раза.

3.16. ** На гладком горизонтальном столе покоятся две одинаковые шайбы, соединенные легкой недеформированной пружиной. Одной из шайб сообщают горизонтальную скорость $V$. Через некоторое время вектор скорости этой шайбы повернулся в горизонтальной плоскости на угол $\alpha = 45^0$, а по величине скорости шайб сравнялись. Найдите для этого момента времени скорости шайб $V_2$ .

<u>Изменение импульса. Центр масс</u>

3.17. * При равномерном движении тела массой $m = 5$ кг по окружности радиусом $R = 2$ м скорость изменения импульса тела $\left|\Delta\vec{p}\right| / \Delta t = 10$ кг·м/с$^2$. Определите линейную скорость v тела.

3.18. * Ракета при старте неподвижно зависла на короткое время над землей, выбрасывая вниз реактивную струю со скоростью $V = 1500$ м/с. Какая масса газов $m_1$ выбрасывается ракетой за время $\tau = 0{,}1$ с, если масса ракеты в этот момент $m = 200$ т?

3.19. ** Человек захотел спуститься по веревочной лестнице с высоты $H = 10$ м из неподвижно висящего свободного аэростата массой $m_1 = 400$ кг. Какой должна быть длина $l$ веревочной лестницы, чтобы, ступая на ее последнюю ступеньку, человек коснулся земли? Масса человека $m_2 = 80$ кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.20. * На гладком льду лежит шест длиной $l = 4$ м. Один из его концов стали медленно поднимать с помощью веревки. Когда угол между шестом и поверхностью льда стал равен $\alpha = 45^\circ$ веревка, натянутая вертикально, оборвалась. На какое расстояние $\Delta l$ сместится при падении шеста на лед его нижний конец?

## 3.2. Работа. Мощность. Кинетическая энергия.

1. Рассмотрим частицу, которая под действием постоянной силы $\vec{F}$ совершает перемещение $\vec{l}$ . <u>Работой силы $\vec{F}$</u> на перемещении $\vec{l}$ называется скалярная величина равная

$$\boxed{A = |\vec{F}| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos\alpha},$$

где $\alpha$ - угол между вектором силы и вектором перемещения. Работа положительна, если $\cos\alpha > 0$, и отрицательна при $\cos\alpha < 0$. При $\alpha = 90^0$ работа силы равна нулю. В системе СИ работа измеряется в джоулях (Дж).

Если сила на данном перемещении частицы не остается постоянной, то нужно вычислить работу на каждом малом перемещении $\Delta\vec{l}$, в пределах которого сила остается практически постоянной, а затем просуммировать результаты: работа равна сумме элементарных работ на всех малых перемещениях (см. Пример 3.7).

Если на частицу действуют несколько сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3,\ldots$, то, пользуясь определением, можно вычислить работу каждой из этих сил на заданном перемещении. Суммарная работа, как нетрудно показать, равна работе результирующей силы $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \ldots$.

2. Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводят величину, называемую мощностью. Мощность, по определению, равна работе, совершаемой силой за единицу времени

$$\boxed{N = \frac{\Delta A}{\Delta t}},$$

где $\Delta A = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{l}| \cdot \cos\alpha$ - работа силы $\vec{F}$ за промежуток времени $\Delta t$. Следовательно

$$N = \frac{|\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{l}| \cdot \cos\alpha}{\Delta t}.$$

Учитывая, что $\Delta\vec{l} / \Delta t = \vec{V}$, получим

$$\boxed{N = |\vec{F}| \cdot |\vec{V}| \cdot \cos\alpha},$$

где $\vec{V}$ - скорость частицы в данный момент времени. Единицей мощности является ватт (Вт), равный джоулю в секунду (Дж/с).

3. Кинетическая энергия частицы по определению равна

$$\boxed{E_к = \frac{mV^2}{2}},$$

где $m$ – масса частицы, $V$ – ее скорость. Кинетическая энергия системы частиц равна сумме их кинетических энергий.

В механике доказывается важная теорема – <u>теорема об изменении кинетической энергии</u>: приращение кинетической энергии системы частиц равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицы системы

$$\boxed{E_{к2} - E_{к1} = A_{всех\ сил}}.$$

3.21. **Укажите ошибочные утверждения**:

1. Если при помощи постоянной силы $F$, направленной под углом $\alpha$ к горизонту, переместить брусок на расстояние $l$ по горизонтальной поверхности, то действующие на брусок силы $F$, трения $F_{тр}$, тяжести $mg$ и реакции опоры $N$ совершат работы:

$$A_F = Fl\cos\alpha, \quad A_{тр} = -F_{тр}l, \quad A_{mg} = 0, \quad A_N = 0.$$

2. Тело из состояния покоя начинает двигаться под действием постоянной силы. Мощность силы увеличивается с ростом скорости частицы.

3. При увеличении скорости частицы в 2 раза ее кинетическая энергия возрастает в 4 раза.

4. Кинетическая энергия не зависит от направления вектора скорости частицы.

5. На частицу действуют две силы. Если за некоторое время первая сила совершит работу $A_1 = 2$ Дж, а вторая сила – работу $A_2 = -5$ Дж, то кинетическая энергия частицы уменьшится на 3 Дж.

6. Если суммарная работа всех сил, действующих на частицу, равна нулю, то частица движется прямолинейно и равномерно.

7. Если для перемещения ящика из одного угла комнаты в другой пришлось совершить работу $A = 100$ Дж, то сила трения при этом совершила работу $A_{тр} = -100$ Дж.

8. Груз массой $m$ висит на пружине. Если при медленном перемещении груза вниз по вертикали на $\Delta x$ внешняя сила совершила работу $A$, то работа силы упругости равна: $A_{упр} = -A + mg\Delta x$.

9. Груз массой $m$ висит на пружине. Если при перемещении груза вниз по вертикали на $\Delta x$ внешняя сила совершила работу $A$, а груз приобрел скорость $V$, то работа силы упругости при таком перемещении равна: $A_{упр} = (mV^2/2) - A - mg\Delta x$.

**Примеры решения задач**

**Пример 3. 6.** За какое время $t$ поднимают вертикально вверх на высоту $h$ = 20 м первоначально покоившийся груз массой $m$ = 20 кг, действуя на него с постоянной силой, если работа этой силы по подъему груза равна $A$ = 4160 Дж?

Решение

На груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и внешняя сила $\vec{F}$. Поскольку груз движется вертикально, то и вектор $\vec{F}$ направлен вертикально вверх. Работа этой силы при подъеме груза на высоту $h$ равна

$$A = Fh\ .$$

Груз движется с постоянным ускорением

$$a = (F - mg)/m\ ,$$

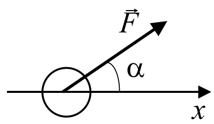
следовательно:

$$h = at^2/2\ .$$

Из записанных уравнений найдем

$$t = h\sqrt{\frac{2m}{A - mgh}} = 10 \text{ с.}$$

**Пример 3. 7.** Частица перемещается вдоль оси $x$. $\vec{F}$ - одна из сил, действующих на частицу. На рис.3.5 приведен график зависимости проекции этой силы на ось $x$ от координаты частицы. Определите работу силы $\vec{F}$ при перемещении частицы из точки с координатой $x_1$ = 2 см в точку с координатой $x_2$ = 5 см.



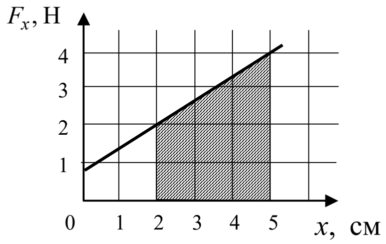




Рис. 3.5.

Решение

Работа на перемещении от $x_1$ до $x_2$ равна сумме элементарных работ на бесконечно малых перемещениях $\Delta x_i$:

$$A = \sum \Delta A_i = \sum F_i \cos\alpha_i \cdot \Delta x_i \ .$$

Произведение $F_i \cos\alpha_i$ равно проекции силы $F_i$ на ось $x$. Следовательно

$$A = \sum F_{xi} \Delta x_i \ .$$

Каждое слагаемое в этой сумме численно равно площади прямоугольника с бесконечно малым основанием $\Delta x_i$ и высотой $F_{xi}$. Вся сумма численно равна площади под графиком функции $F_x(x)$ на интервале от $x_1$ до $x_2$. Вычисляя площадь заштрихованной на рис.3.5 трапеции, получим

$$A = \frac{(2+4)}{2} \cdot (0{,}05 - 0{,}02) = 0{,}09 \text{ Дж.}$$

**Пример 3. 8.** Какую работу $A$ нужно совершить, чтобы увеличить скорость тела от $V_0 = 2$ м/с до $V_1 = 6$ м/с на горизонтальном пути $s = 10$ м. На всем пути на тело действует постоянная сила трения $F_{тр} = 2$ Н. Масса тела $m = 1$ кг.

Решение

По теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A + A_{тр} \ ,$$

где

$$A_{тр} = F_{тр} s \cos 180^0 = -F_{тр} s \ .$$

Отсюда

$$A = \frac{m\left(V_1^2 - V_0^2\right)}{2} + F_{тр} \cdot s = 36 \text{ Дж.}$$

**Пример 3. 9.** Из винтовки выстрелили вертикально вверх. Найдите суммарную работу $A$ сил тяжести и сопротивления воздуха, действующих на пулю, к моменту времени, когда скорость пули после изменения направления движения стала в $n = 2$ раза меньше ее начальной скорости $V_0 = 400$ м/с. Масса пули $m = 10$ г.

Решение

По теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{m(V_0 / n)^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A \ .$$

Отсюда

$$A = -\frac{mV_0^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -600 \text{ Дж}.$$

**<u>Задачи для самостоятельного решения</u>**

<u>Работа</u>

3.22. Какую работу $A$ необходимо совершить для равноускоренного подъема груза массой $m$ = 5 кг из состояния покоя на высоту $H$ = 10 м за время $t$ = 2 с?

3.23. Груз перемещают с ускорением $a$ = 4 м/с$^2$ на одно и то же расстояние: один раз – с помощью горизонтальной силы по горизонтальной поверхности с коэффициентом трения μ = 0,3, второй раз – вертикально вверх. Определите отношение $A_2/A_1$ работ сил, перемещающих груз в этих случаях.

3.24. Подъемный кран равномерно поднимает груз массой $m$ = 2 т. Определите скорость $V$ подъема груза, если мощность двигателя крана $P$ = 4 кВт, а КПД установки η = 60%.

3.25. Прикладывая к лежащей на горизонтальной поверхности шайбе массы $m$ горизонтальную силу постоянной величины $F$, шайбу перемещают по окружности радиуса $R$ с постоянной скоростью $V$. Определите работу $A$ силы трения за один полный оборот.

<u>Кинетическая энергия</u>

3.26. Определите массу поступательно движущегося тела, кинетическая энергия которого равна $E$ = 10 Дж, а величина импульса $p$ = 2 кг·м/с.

3.27. Мяч, летящий со скоростью $V_1$ = 14 м/с, отбрасывается ударом ракетки в противоположном направлении со скоростью $V_2$ = 20 м/с. Найдите величину изменения вектора импульса $|\Delta\vec{p}|$ мяча при ударе, если приращение его кинетической энергии $\Delta E$ = 6 Дж.

3.28. Какую работу $A$ нужно совершить, чтобы остановить тележку массой $m$ = 100 кг, движущуюся со скоростью $V$ = 4 м/с по горизонтальной поверхности?

3.29. Свободное тело разогнали из состояния покоя, совершив работу $A$, а затем вновь остановили, прикладывая постоянную тормозящую силу $F$ в течение времени $t$. Определите массу тела.

3.30. * На тело массой $m$ = 1 кг, движущееся с постоянной скоростью $V$ = 1 м/с, начала действовать сила, направленная противоположно начальной скорости тела. Найдите работу $A$ этой силы к моменту времени, когда величина скорости тела после изменения направления будет в $n$ = 2 раза больше, чем $V$.

3.31. * Тело массой $m$ = 1000 кг начинает двигаться из состояния покоя под действием некоторой постоянной силы $F$ и, пройдя путь $s$ = 100 м, приобретает скорость $V$ = 20 м/с. Определите минимальную $P_{\min}$ и максимальную $P_{\max}$ мощность силы $F$ на этом участке движения.

## 3.3. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии

1. Теорема об изменении кинетической энергии полезна при решении многих задач механики. Основная трудность при ее использовании состоит в вычислении работы сил, действующих на тела системы. Эту работу просто вычислить лишь в тех случаях, когда все силы постоянны по величине и направлению. Если это не так, то приходится вычислять работу на каждом бесконечно малом перемещении частицы, а затем суммировать полученные работы для всего перемещения.

Работа силы, вообще говоря, зависит не только от начального и конечного положений частицы, но и от формы траектории частицы. Существует, однако, класс сил, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется только положениями начальной и конечной точек. Такие силы называются консервативными. В механике к консервативным силам относятся силы тяжести и упругости.

2. Для консервативных сил можно ввести потенциальную энергию, зависящую от координат частицы, так что работа консервативной силы на произвольной траектории между точками 1 и 2 равна убыли потенциальной энергии:

$$\boxed{A_{12} = E_{п1} - E_{п2}}.$$

Это соотношение можно рассматривать как формальное определение потенциальной энергии.

Потенциальная энергия частицы в поле силы тяжести равна

$$\boxed{E_п = mgh},$$

где $m$ – масса частицы, $h$ – ее координата на оси $y$, направленной вертикально вверх. Начало отсчета на этой оси $y$ может быть выбрано произвольно, поскольку работа силы тяжести, определяется разностью координат:

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2).$$

Потенциальная энергия упруго деформированной пружины равна

$$\boxed{E_п = \frac{kx^2}{2}},$$

где $x$ – деформация пружины. При изменении деформации пружины от $x_1$ до $x_2$ сила упругости совершают работу

$$A_{12} = E_{п1} - E_{п2} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}.$$

Заметим, что потенциальную энергию следует относить не к частице, а к системе взаимодействующих между собой частиц и тел. Например, потенциальная энергия $mgh$ - есть энергия взаимодействия тела массой $m$ с Землей, энергия $kx^2/2$ - есть энергия взаимодействия отдельных частей упруго деформированной пружины.

К числу неконсервативных сил относятся силы трения и сопротивления. Работа этих сил зависит от формы траектории и для них нельзя ввести потенциальную энергию.

3. Если тела, составляющие замкнутую механическую систему, взаимодействуют между собой только силами тяготения и упругости, то работа этих сил равна убыли потенциальной энергии тел:

$$A_{\text{всех сил}} = E_{п1} - E_{п2}.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$E_{к2} - E_{к1} = A_{\text{всех сил}}.$$

Отсюда следует

$$E_{к2} - E_{к1} = E_{п1} - E_{п2},$$

или

$$\boxed{E_{п1} + E_{к1} = E_{п2} + E_{к2}}.$$

Таким образом, сумма кинетической и потенциальной энергии тел, составляющих замкнутую систему и взаимодействующих между собой силами тяготения и упругости, остается неизменной.

Это утверждение выражает закон сохранения энергии в механических процессах. Он является следствием законов Ньютона. Сумму $E = E_п + E_к$ называют полной механической энергией. Закон сохранения механической энергии выполняется только тогда, когда тела в замкнутой системе взаимодействуют между собой консервативными силами, то есть силами, для которых можно ввести понятие потенциальной энергии.

4. Если система тел, взаимодействующих между собой только консервативными силами, не является замкнутой, то

$$A_{всех\ сил} = E_{п1} - E_{п2} + A_{внеш},$$

где $A_{внеш}$ – работа внешних сил. По теореме об изменении кинетической энергии

$$E_{к2} - E_{к1} = A_{всех\ сил} = E_{п1} - E_{п2} + A_{внеш}.$$

Отсюда следует, что изменение механической энергии системы в этом случае равно работе внешних сил:

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_{внеш}},$$

где $E_2 = E_{к2} + E_{п2}$, $E_1 = E_{к1} + E_{п1}$.

5. Если кроме сил тяготения и упругости на тела системы действуют и неконсервативные силы (силы трения, сопротивления), то работа неконсервативных сил $A_{сопр}$ также приводит к изменению полной механической энергии системы:

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_{внеш} + A_{сопр}}.$$

**Примеры решения задач**

**Пример 3. 10.** Тело массой $m = 0{,}5$ кг брошено вертикально вверх. Когда тело поднялось на некоторую высоту, его потенциальная энергия увеличилась на $\Delta E_п = 25$ Дж, а кинетическая энергия уменьшилась в $k = 2$ раза по сравнению с начальной. На какую максимальную высоту $H$ над точкой старта поднимется тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Обозначим $E_к$ и $E_п$ - кинетическую и потенциальную энергии тела в точке старта сразу после броска. Тогда полную механическую энергию тела в точке старта $E_1$, на «некоторой высоте» $E_2$ и на максимальной высоте над точкой старта $E_3$ можно выразить формулами

$$E_1 = E_к + E_п\,,$$
$$E_2 = (E_п + \Delta E_п) + (E_к / k)\,,$$
$$E_3 = E_п + mgH\,.$$

По закону сохранения механической энергии $E_1 = E_2 = E_3$. Следовательно:

$$E_п + E_к = (E_п + \Delta E_п) + (E_к / k)\,,$$
$$E_п + E_к = E_п + mgH\,.$$

Из этих уравнений найдем

$$H = \frac{k\Delta E_п}{mg(k-1)} = 10 \text{ м.}$$

Заметим, что результат не зависит от величины $E_п$ и потенциальную энергию в точке старта можно было сразу принять равной нулю.

**<u>Пример 3. 11.</u>** Шарик небольшого радиуса висит на легкой нерастяжимой нити длиной $l = 40$ см. Шарик отклонили от положения равновесия так, что нить составила с вертикалью угол $\alpha = 60^0$, и без толчка отпустили. Определите максимальную скорость шарика при его последующем движении. Сопротивлением воздух пренебречь.

<u>Решение</u>

Поскольку нить нерастяжимая, то шарик будет двигаться по окружности. Очевидно, что скорость шарика максимальна в нижней точке траектории. Так как сопротивление воздуха отсутствует, можно воспользоваться законом сохранения механической энергии. Будем считать, что потенциальная энергия шарика в нижней точке траектории равна нулю. Тогда начальная энергия шарика

$$E_1 = mgh\,,$$

а конечная

$$E_2 = \frac{mV^2}{2}\,,$$

где $V$ – скорость шарика в нижней точке траектории. По закону сохранения энергии

$$mgh = \frac{mV^2}{2}\,.$$

Высоту $h$ найдем, рассматривая прямоугольный треугольник на рис.3.6:

$$h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha) = 2l\sin^2(\alpha/2)\ .$$

Окончательно получим

$$V = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2} = 2 \text{ м/с}.$$

**Пример 3. 12.** Пружину игрушечного пистолета сжимают на $\Delta x$ = 2 см, приложив силу $F$ = 12,5 Н. С какой скоростью $V$ вылетит из пистолета шарик массой $m$ = 10 г при горизонтальном выстреле?

Решение

Сжатая пружина пистолета обладает потенциальной энергией

$$E_{\text{п}} = k\Delta x^2/2\ .$$

Пружина распрямляется, ее потенциальная энергия становится равной нулю, при этом шарик приобретает кинетическую энергию. По закону сохранения энергии

$$\frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{mV^2}{2}\ .$$

Учтем также, что

$$F = k\Delta x\ .$$

Отсюда получим

$$V = \sqrt{F\Delta x/m} = 5 \text{ м/с}\ .$$

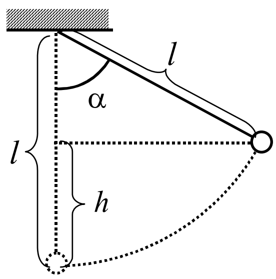



Рис. 3.6.

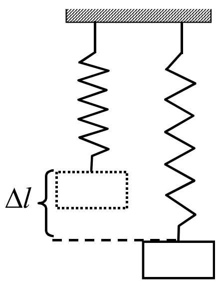



Рис. 3.7.

**Пример 3. 13.** К нижнему концу недеформированной пружины жесткостью $k$ = 200 Н/м прикрепили груз массой $m$ = 1 кг и без толчка отпустили. Определите максимальную деформацию $\Delta l$ пружины.

Решение

Примем, что потенциальная энергия равна нулю в нижней точке траектории груза, когда растяжение пружины равно $\Delta l$ (рис.3.7). Тогда в исходном положении энергия системы $E_1 = mg\Delta l$, а в нижней точке траектории энергия равна $E_2 = k\Delta l^2 / 2$. По закону сохранения механической энергии

$$mg\Delta l = \frac{k\Delta l^2}{2}.$$

Отсюда

$$\Delta l = \frac{2mg}{k} = 10 \text{ см}.$$

При решении этой задачи многие абитуриенты допускают типичную ошибку, считая, что максимальная деформация пружины будет в положении равновесия, когда $mg = k\Delta l$. Конечно это не так: груз «проскочит» положение равновесия с максимальной скоростью и лишь после этого начнет замедляться.

**Пример 3. 14.** Груз массой *m* висит на легкой пружине жесткостью *k*. Какую минимальную работу *A* нужно совершить, чтобы, смещая груз по вертикали, перевести пружину в недеформированное состояние?

Решение

Когда груз неподвижно висит на пружине, действующая на него сила тяжести уравновешивается силой упругости

$$mg = kx,$$

где *x* – удлинение пружины. Примем, что в начальном состоянии (в положении равновесия) потенциальная энергия силы тяжести равна нулю. Тогда полная механическая энергия в начальном состоянии равна

$$E_1 = \frac{kx^2}{2}.$$

В конечном состоянии, когда груз сместят вверх на расстояние *x* и пружина перейдет в недеформированное состояние, энергия системы станет равной

$$E_2 = mgx.$$

Энергия системы увеличивается, поскольку внешняя сила совершает положительную работу:

$$E_1 + A = E_2 .$$

Отсюда найдем

$$A = mgx - \frac{kx^2}{2} .$$

Подставляя в эту формулу $x = mg / k$ , окончательно получим

$$A = (mg)^2 / 2k .$$

**<u>Пример 3. 15.</u>** Камень массой $m$ = 1 кг бросили с высоты $h$ = 30 м с начальной скоростью $V_0$ = 25 м/с. Перед ударом о землю скорость камня $V_1$ = 30 м/с. Определите работу $A$ силы сопротивления воздуха при движении камня.

<u>Решение</u>

Энергия камня на высоте $h$ равна

$$E_1 = mgh + \frac{mV_0^2}{2} .$$

Перед ударом о землю энергия камня стала равной

$$E_2 = \frac{mV_1^2}{2} .$$

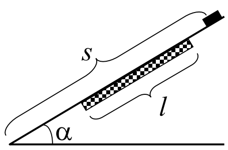
Изменение механической энергии равно работе силы сопротивления воздуха

$$E_2 - E_1 = A .$$

Из записанных выше уравнений найдем

$$A = m\left(\frac{V_1^2 - V_0^2}{2} - gh\right) = .–162,5 \text{ Дж.}$$

**<u>Пример 3. 16.</u>** Небольшая шайба начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом. На наклонной плоскости имеется шероховатый участок длиной $l = 1$ м с коэффициентом трения $\mu = 0{,}2$ между плоскостью и шайбой (см. рис.); вне этого участка трение отсутствует. Определите скорость шайбы $V$ на расстоянии $s$ = 2 м от точки старта.



Решение
На шайбу в процессе ее движения действуют три силы: сила тяжести, сила реакции опоры и сила трения. При перемещении шайбы на расстояние $s$ сила тяжести совершает работу

$$A_{\text{тяж}} = mgs \cdot \cos(90^0 - \alpha) = mgs \cdot \sin\alpha\,.$$

Сила реакции опоры работу не совершает, поскольку она перпендикулярна вектору перемещения шайбы. Работа силы трения равна

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} l\,,$$

где

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha\,.$$

Скорость шайбы найдем, воспользовавшись теоремой об изменении кинетической энергии

$$\frac{mV^2}{2} = A_{\text{тяж}} + A_{\text{тр}}\,.$$

Получим

$$V = \sqrt{2g(s\sin\alpha - \mu l\cos\alpha)} \approx 4{,}1 \text{ м/с}.$$

## Задачи для самостоятельного решения

### Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии

3.32. Небольшая шайба скользит по гладкому горизонтальному столу со скоростью $V_1$ = 1 м/с, достигает края стола и падает на пол с высоты $h$ = 75 см. Определите скорость $V_2$ шайбы непосредственно перед ударом о пол. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.33. Тело массы $m$ = 100 г брошено вертикально вверх с начальной скоростью $V_0$ = 10 м/с. В верхней точке траектории потенциальная энергия тела равна $E_P$ = 8 Дж. Определите потенциальную энергию тела $E_{P0}$ в точке старта. Сопротивлением воздуха. пренебречь.

3.34. Тело массой $m$ = 0,5 кг бросили с некоторой высоты. Когда потенциальная энергия тела уменьшилась на $\Delta E_{\text{п}}$ = 16 Дж, его кинетическая энергия стала равной $E_{\text{к}}$ = 25 Дж. С какой начальной скоростью брошено тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

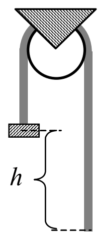
3.35. Для того, чтобы груз, подвешенный на жестком легком стержне, вращался в вертикальной плоскости, ему необходимо сообщить в нижней точке минимальную скорость v = 4 м/с. Определите длину $l$ стержня. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.36. Однородный стержень массой $m = 50$ г свободно вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через его конец. При вращении кинетическая энергия стержня меняется от минимального значения $E_{\min} = 0,1$ Дж до максимального $E_{\max} = 0,3$ Дж. Определите длину стержня $l$. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

3.37. На сколько изменится потенциальная энергия бруска массой $m = 150$ г, если его перевести из горизонтального положения в вертикальное? Брусок имеет квадратное сечение со стороной $a = 2$ см и длину $l = 10$ см. В первоначальном положении он лежит на плоскости вдоль своей длинной стороны $l$.

3.38. * Представьте себе, что удалось выкопать колодец вдоль радиуса Земли до ее центра. а) Какую минимальную работу $A$ следует совершить, чтобы вытащить тело массы $m$ со дна этого колодца на поверхность Земли? При этом считается известным, что на тело в колодце действует сила тяжести $F = (mg/R)x$, где $g$ - ускорение свободного падения на поверхности Земли, $R$ - радиус Земли, $x$ – расстояние от дна колодца до тела массой $m$. б) Выведите приведенную выше формулу для силы тяжести $F$.

3.39. ** Канат длиной $L = 17$ м переброшен через легкий блок. К одному концу каната прикреплен груз. Система находится в равновесии, когда груз расположен выше свободного конца каната на $h = 3$ м. Из этого положения после легкого толчка груз начинает опускаться. Определите скорость груза $V$, когда он пройдет путь, равный $h$. Трением и размерами груза пренебречь.




Задачи с элементами динамики

3.40. Шарик вращается на невесомой нерастяжимой нити в вертикальной плоскости. На какую величину $\Delta a$ ускорение шарика в нижней точке больше, чем в верхней? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.41. Математический маятник отклонили на угол $\alpha$ от вертикали и отпустили. Ускорение груза маятника в нижней точке $a = 10$ м/с$^2$. Определите угол $\alpha$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.42. * Нить математического маятника с прикрепленным к ней грузом малых размеров отвели в горизонтальное положение и отпустили. Определите угол $\alpha$ отклонения нити от вертикали, при котором сила натяжения нити равна силе тяжести, действующей на груз маятника. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.43. * Нить длиной $l_1 = 60$ см с привязанным к ней шариком массы $m$ отклонили на угол $\alpha = 90°$ от вертикали и отпустили. На каком минимальном расстоянии $l_2$ от точки подвеса по вертикали нужно вбить гвоздь, чтобы нить порвалась, налетев на него? Нить выдерживает силу натяжения $T = nmg = 7mg$, где $g$ – ускорение свободного падения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Пружины

3.44. На легкой пружине висит груз массой $m_1 = 1$ кг. Груз какой массы $m_2$ следует подвесить к грузу $m_1$, чтобы потенциальная энергия упругой деформации пружины возросла в $n = 2$ раза?.

3.45. * Брусок, двигаясь по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на легкую пружину, прикрепленную одним концом к стене. Скорость бруска, направленная вдоль оси пружины, уменьшилась в $k = 2$ раза, когда пружина сжалась на $x = 17$ мм. Определите максимальную деформацию пружины $x_m$.

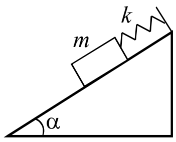
3.46. ** Во сколько раз скорость пульки пружинного пистолета в середине разгонного участка меньше ее максимальной скорости? Силами тяжести и трения пренебречь.

3.47. * Два бруска массой $m = 1$ кг каждый соединены легкой пружиной жесткостью $k = 225$ Н/м. Бруски двигаются по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $V = 2$ м/с, направленной вдоль пружины. Пружина при этом не деформирована. Найдите максимальное значение силы упругости $F$ после внезапной остановки одного из брусков.

3.48. * К нижнему концу закрепленной в верхней точке пружины жесткостью $k = 200$ Н/м подвесили два груза разной массы, соединенных между собой легкой нитью. Масса нижнего груза $m = 500$ г. На какую максимальную высоту $h$ поднимется верхний груз, если нить пережечь? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.49. * На массивном столике, укрепленном на легкой вертикальной пружине жесткостью $k$ = 100 Н/м, лежит груз массой $m$ = 300 г. На какую максимальную высоту $h$ поднимется столик, если груз быстро убрать? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.50. * Брусок массой $m$ = 0,5 кг поместили на гладкую наклонную плоскость с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^0$, прикрепили к недеформированной пружине жесткостью $k$ = 50 Н/м и отпустили с нулевой начальной скоростью. Определите максимальную скорость $v_m$ бруска в процессе движения.




Изменение механической энергии системы под действием внешней силы

3.51. Пружину жесткостью $k$ = 100 Н/м растянули на $\Delta x$ = 10 см. Какую работу $A$ при этом совершили? В начальном положении пружина не деформирована.

3.52. Две пружины, жесткости которых $k_1$ = 0,3 кН/м и $k_2$ = 0,5 кН/м, соединены последовательно. Какую работу $A$ необходимо совершить, чтобы удлинить пружины в сумме на $\Delta x$ = 8 см?

3.53. * Груз массой $m$ висит на легкой пружине жесткостью $k$. Какую минимальную работу $A$ нужно совершить, чтобы, смещая груз по горизонтали, утроить удлинение пружины? Ускорение свободного падения равно $g$.

3.54. * На чашке пружинных весов лежит гиря массой $m$, при этом деформация пружины равна $l$. Какую работу $A$ нужно совершить, чтобы медленно снять гирю с весов, прикладывая к ней вертикальную силу? Массой чашки весов пренебречь. Ускорение свободного падения $g$.

3.55. * Небольшой шарик массой $m$ = 20 г, подвешенный на легкой нерастяжимой нити длиной $l$ = 1 м, раскрутили так, что он начал двигаться по окружности в горизонтальной плоскости. При этом угол, составляемый нитью с вертикалью, $\alpha = 60^0$. Определите работу $A$, совершенную при раскручивании шарика.

Изменение механической энергии системы под действием сил трения и сопротивления

3.56. Парашютист массой $m$ = 80 кг отделился от неподвижно висящего вертолета и, пролетев до раскрытия парашюта расстояние $l$ = 200 м, приобрел скорость $V = 50$ м/с. Найдите работу $A$ силы сопротивления воздуха на этом пути.

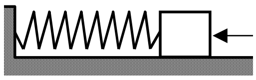
3.57. Хоккейная шайба с начальной скоростью $v_0 = 6$ м/с проходит по льду до удара о борт площадки расстояние $S_1 = 10$ м. Считая удар о борт абсолютно упругим, определите путь $S_2$, который шайба пройдет после удара до остановки, если коэффициент трения шайбы о лед $\mu = 0{,}1$.

3.58. Пуля, летевшая горизонтально со скоростью $v_1 = 500$ м/с, попадает в вертикально закрепленную толстую доску и застревает на середине ее толщины. Определите начальную скорость пули $v_2$, необходимую для пробивания доски. Силу сопротивления считайте постоянной.

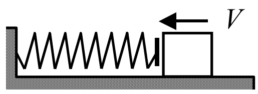
3.59. Пуля пробивает закрепленную доску толщиной $d_1 = 3{,}6$ см и вылетает из нее, потеряв $\delta = 36\%$ энергии. Найдите минимальную толщину $d_2$ доски, которую нужно поставить вплотную вслед за первой, чтобы пуля в ней застряла. Силы трения в обеих досках постоянны и одинаковы. Силу тяжести не учитывать.

3.60. ** Нерастяжимая веревка длиной $L = 2$ м и массой $m = 0{,}5$ кг симметрично переброшена через расположенный горизонтально тонкий стержень. Сначала веревка покоилась, а затем, после легкого толчка, начала скользить по стержню. В момент, когда веревка полностью соскользнула со стержня, ее скорость стала равной $V = 2$ м/с. Определите работу силы трения между веревкой и стержнем.

3.61. * На горизонтальном столе находится кубик, прикрепленный к вертикальной стене легкой горизонтальной недеформированной пружиной. Кубику коротким ударом вдоль оси пружины сообщают кинетическую энергию $E_1$. Через некоторое время кубик возвращается в исходную точку, имея кинетическую энергию $E_2$. Во сколько $n$ раз максимальная величина силы упругости, действующая на кубик при его движении, больше силы трения?

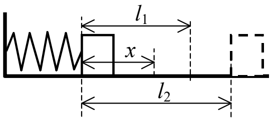


3.62. * Движущийся поступательно по горизонтальной плоскости кубик массы $m$ налетает со скоростью $V$ на невесомую пружину жесткости $k$, ось которой перпендикулярна грани кубика, параллельна его скорости и проходит через центр масс кубика. При каких значениях $V$ пружина после сжатия вернется в исходное



недеформированное состояние? Коэффициент трения кубика о плоскость $\mu$, ускорение свободного падения $g$.

3.63. ** Легкую горизонтальную пружину, один конец которой закреплен, деформируют на $l_1 = 4$ см, прижимая к ее свободному концу брусок. Брусок отпускают и пружина, распрямляясь, толкает его по горизонтальному столу. Брусок (он не прикреплен к пружине) проходит до остановки расстояние $l_2 = 6$ см. На каком расстоянии $x$ от точки старта скорость бруска максимальна?




## 3.4. Упругие и неупругие столкновения. Совместное использование законов сохранения импульса и энергии.

Столкновением называют кратковременное взаимодействие тел, в результате которого их скорости за малое время существенно изменяются. Во время столкновения между телами действуют быстро переменные силы, величины которых, как правило, не известны. В этих случаях не удается рассматривать столкновения с помощью законов Ньютона. Применение законов сохранения импульса и энергии во многих случаях позволяет получить связь между скоростями тел до и после столкновения, не вдаваясь в детали взаимодействия между телами во время самого столкновения.

В механике часто используют две модели столкновений – абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.

Абсолютно упругим (или просто упругим) ударом называется столкновение, при котором сохраняется механическая энергия системы тел. Во многих случаях столкновения атомов, молекул и элементарных частиц можно считать упругими. При упругом ударе наряду с законом сохранения импульса выполняется закон сохранения механической энергии.

Чаще всего при столкновениях макроскопических тел их механическая энергия не сохраняется. Такие столкновения называют неупругими. Механическая энергия при неупругих столкновениях частично или полностью переходит во внутреннюю (тепловую) энергию.

Изучение этого вопроса привело к выводу о существовании в природе универсального закона сохранения энергии: энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую. При этом понятие энергии пришлось расширить введением понятий о новых ее формах (помимо механической). Так, например, внутренняя энергия равна сумме кинетической энергии хаотического движения молекул и потенциальной энергии взаимодействия молекул между собой.

Среди неупругих столкновений особо выделяют так называемые абсолютно неупругие столкновения (удары). Абсолютно неупругим ударом называют такое столкновение, при котором тела соединяются (слипаются) друг с другом и дальше двигаются как единое целое.

**Примеры решения задач**

**Пример 3. 17.** Тележка массой $m_1$ со скоростью $V_0$ «налетает» на неподвижную тележку массой $m_2$. Считая удар центральным и абсолютно упругим, определите скорости тележек $V_1$ и $V_2$ после удара.

Решение

По закону сохранения импульса

$$m_1 V_0 = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x},$$

где $V_{1x}$ и $V_{2x}$ – проекции на горизонтальную ось $x$ векторов $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ (рис.3.8).

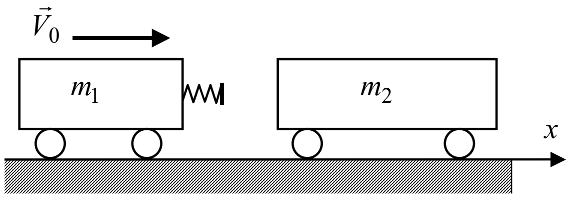



Рис. 3.8.

По закону сохранения механической энергии

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{m_1 V_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2x}^2}{2}.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем

$$V_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)V_0}{m_1 + m_2}, \quad V_{2x} = \frac{2m_1 V_0}{m_1 + m_2}.$$

В частном случае, когда $m_1 = m_2$, получаем $V_{1x} = 0$, $V_{2x} = V$, то есть тележки при упругом ударе «обмениваются» скоростями.

**Пример 3. 18.** Тележки массами $m_1$ и $m_2$ движутся навстречу друг другу со скоростями $V_1$ и $V_2$. Определите количество тепла $Q$, выделившегося при абсолютно неупругом столкновении тележек.

Решение

По закону сохранения импульса

$$m_1V_1 - m_2V_2 = (m_1 + m_2)V_x ,$$

где $V_x$ – проекция вектора скорости тележек после удара на ось $x$, сонаправленную с вектором скорости первой тележки до удара.

По закону сохранения энергии

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)V_x^2}{2} + Q .$$

Из этих уравнений найдем $Q$:

$$Q = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} - \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right)\left(\frac{m_1V_1 - m_2V_2}{m_1 + m_2}\right)^2 .$$

После алгебраических преобразований получим

$$Q = \frac{m_1m_2(V_1 + V_2)^2}{2(m_1 + m_2)} .$$

**Пример 3. 19.** В шарик, висящий на невесомой нерастяжимой нити длиной $l$ = 1,8 м, попадает горизонтально летящая пуля и застревает в нем. При какой минимальной скорости v пули шарик поднимется выше точки подвеса нити? Масса шарика в $n$ = 20 раз больше массы пули.

Решение

Заметим, что начальная энергия $E_1 = m\text{v}^2/2$ системы «шарик-пуля» не равна ее конечной энергии, так как при неупругом столкновении пули с шариком выделяется тепло ($m$ – масса шарика). Начальный импульс системы $\vec{p} = m\vec{\text{v}}$ также отличен от конечного импульса, равного нулю в верхней точке траектории. Изменение импульса системы «шарик-пуля» происходит из-за действия внешних сил: силы натяжения нити и силы тяжести.

Однако, если считать, что время столкновения пули с шариком настолько мало, что шарик не успевает за это время заметно сместиться из положения равновесия, то силы натяжения нити и тяжести за это малое время не успевают заметно изменить импульс системы. Тогда по закону сохранения импульса

$$m\text{v} = (m + nm)V\ ,$$

где $V$ – скорость шарика с застрявшей в нем пулей сразу после столкновения (то есть в момент, когда пуля прекратила двигаться относительно шарика). Именно во время столкновения, когда пуля движется в шарике, происходит выделение тепла. Далее шарик вместе с застрявшей в нем пулей движется без трения и сопротивления под действием сил тяжести и натяжения нити. Механическая энергия при таком движении не изменяется:

$$\frac{m(n+1)V^2}{2} = m(n+1)gl\ .$$

Из этого уравнения получим

$$V^2 = 2gl\ .$$

Следовательно

$$\text{v} = (n+1)V = (n+1)\sqrt{2gl} = 126 \text{ м/с}.$$

**Пример 3. 20.** Шарики массами $m$ и $2m$, соединенные легкой недеформированной пружиной, находятся на гладком горизонтальном столе. Шарику массой $m$ сообщили скорость v в направлении второго шарика. Определите потенциальную энергию $E_p$ пружины в момент ее максимального сжатия.

Решение

Пока скорость легкого шарика превышает скорость тяжелого, расстояние между шариками уменьшается. Расстояние между шариками начнет увеличиваться, когда скорость тяжелого шарика превысит скорость легкого. Отсюда следует, что расстояние между шариками минимально в момент времени, когда скорости шариков равны. Обозначим эту скорость $V$. По закону сохранения энергии

$$\frac{m\text{v}^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + \frac{2mV^2}{2} + E_p\ .$$

Запишем также закон сохранения импульса

$$m\text{v} = (m + 2m)V\ .$$

Из этих уравнений найдем

$$E_p = m\text{v}^2/3.$$

**3.64. <u>Укажите ошибочные утверждения</u>**

1. Если на гладком горизонтальном столе сталкиваются две шайбы, то их суммарный импульс $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ при столкновении не изменяется. Импульс шайб сохраняется при любом характере столкновения (упругом или не упругом).

2. При столкновении двух шайб на гладком горизонтальном столе их суммарная механическая энергия не изменяется только в том случае, если столкновение является упругим. При неупругих столкновениях суммарная механическая энергия шайб уменьшается.

3. При движении по гладкой горизонтальной поверхности двух шайб, соединенных легкой резинкой, их суммарный импульс $\vec{P}$ остается неизменным только в том случае, если шайбы не сталкиваются или столкновения между ними являются упругими.

4. При движении по гладкой горизонтальной поверхности двух шайб, соединенных легкой упругой нитью, полная механическая энергия системы «шайбы-упругая нить» остается неизменной, если шайбы не сталкиваются или столкновения между ними являются упругими.

5. При движении двух шайб, соединенных легкой пружинкой, по наклонной плоскости изменение их кинетической энергии равно суммарной работе сил тяжести, упругости и трения, действующих на шайбы.

6. При движении двух шайб, соединенных легкой пружинкой, по наклонной плоскости изменение полной механической энергии системы «шайбы-пружинка» (она включает кинетические энергии шайб, их потенциальные энергии в поле тяжести и энергию упругой деформации пружинки) равно суммарной работе сил трения, действующих на шайбы.

## <u>Задачи для самостоятельного решения</u>

<u>Абсолютно неупругие удары</u>

3.65. Шар массой $m$ = 3 кг, имеющий скорость v = 2 м/с, испытал абсолютно неупругий центральный удар с покоящимся шаром массой $2m$. Определите количество тепла $Q$, выделившегося при ударе.

3.66. Два шарика одинаковой массы $m$ = 200 г движутся навстречу друг другу. После абсолютно неупругого центрального соударения шариков выделилось $Q = 5$ Дж тепла. Определите относительную скорость v шариков перед соударением.

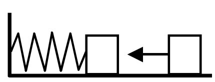
3.67. * Два шарика массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Во сколько раз изменится суммарная механическая энергия шариков в результате абсолютно неупругого центрального соударения?

3.68. Из бункера с высоты $h = 1$ м высыпалась порция песка массой $m = 100$ кг и попала в вагонетку массой $M = 200$ кг, движущуюся горизонтально со скоростью $V_0 = 3$ м/с. Сопротивление движению вагонетки со стороны рельсов пренебрежимо мало. а) Найдите скорость $V$ вагонетки с песком. б) На сколько уменьшилась суммарная механическая энергия вагонетки и песка?

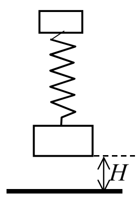
3.69. Брусок, двигавшийся по горизонтальной поверхности со скоростью $V_0$, испытал абсолютно неупругий удар с неподвижным бруском той же массы. Какое расстояние $s$ пройдут бруски после столкновения до остановки? Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны $\mu$. Ускорение свободного падения равно $g$. Бруски движутся поступательно.

3.70. ** Какая часть механической энергии переходит в тепло при абсолютно неупругом столкновении двух одинаковых шариков, движущихся до соударения с одинаковыми по величине скоростями перпендикулярно друг к другу?

3.71. * Тело массой $m = 0{,}2$ кг, движущееся по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v = 10$ м/с, абсолютно неупруго сталкивается с покоящимся телом такой же массы $m$, прикрепленным к стенке пружиной жесткостью $k = 1$ кН/м. Скорость тела направлена вдоль оси пружины перпендикулярно к стенке. Определите максимальную деформацию пружины $x_m$.



3.72. ** Два груза, соединенные легкой пружиной, удерживают на одной вертикали так, что пружина не деформирована, а нижний груз находится на высоте $H = 12$ см от поверхности стола. Грузы одновременно отпускают. Найдите: а) скорость верхнего груза $V$ в момент удара нижнего о стол; б) максимальное сжатие пружины $x$ после абсолютно неупругого удара нижнего груза о стол. Известно, что после прекращения колеба-



ний верхнего груза пружина оказалась сжатой на $l = 1$ см. Потери механической энергии за один период колебаний малы.

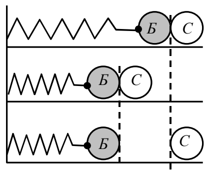
3.73. * С высоты $H = 9{,}5$ м над землей с начальной скоростью равной нулю падает шар массой $M = 1$ кг. На высоте $H/2$ в шар попадает пуля и застревает в нем. Перед попаданием в шар пуля летела горизонтально со скоростью $V_0 = 600$ м/с, ее масса $m = 10$ г. Найдите величину $V$ скорости шара перед ударом о землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Упругие удары и взаимодействия

3.74. Монета скользит по горизонтальной поверхности стола и сталкивается со скоростью $V_0$ с такой же, но покоящейся монетой. Считая удар центральным и абсолютно упругим, определите расстояние $s$ между монетами после их остановки. Коэффициент трения между каждой монетой и столом равен $\mu$, ускорение свободного падения $g$.

3.75. В результате упругого лобового столкновения частицы массы $m_1$ с покоящейся частицей обе разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Найдите массу $m_2$ второй частицы.

3.76. В результате упругого центрального столкновения двух частиц, двигавшихся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, частица массы $m_1$ остановилась. Найдите массу $m_2$ второй частицы.




3.77. * На верхнем рисунке изображена незаряженная пружинная "пушка": пружина не деформирована, снаряд (С) касается бойка (Б). Пушку можно зарядить двумя способами: 1) смещая снаряд вместе с бойком, 2) смещая только боек (нижний рис.). В каком случае максимальная скорость снаряда будет больше и во сколько раз? Считать удар бойка о снаряд абсолютно упругим. Массы бойка и снаряда одинаковые, масса пружины пренебрежимо мала.

3.78. Тележки массами $m = 1$ кг и $M = 2$ кг покоятся на гладком горизонтальном столе. Между тележками помещена легкая сжатая пружинка, перевязанная ниткой. Нитку пережигают, и пружинка начинает расталкивать тележки. Известно, что максимальная скорость легкой тележки $V_1 = 2$ м/с. а) Чему равна максимальная скорость $V_2$ тяжелой тележки? б) Найдите начальную энергию $W$ сжатой пружинки.

3.79. * Два вагона движутся в одном направлении со скоростями $V_1 = 0{,}3$ м/с и $V_2 = 0{,}2$ м/с. Определите максимальную энергию $E_{max}$ деформации пружин буферов вагонов при их столкновении. Масса каждого вагона $m = 60$ т. Выделением тепла пренебречь.

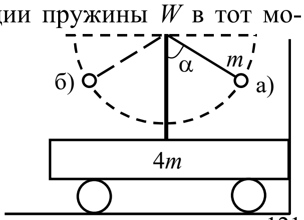
3.80. * На гладкой горизонтальной поверхности находятся два одинаковых бруска массами $m = 1$ кг, соединенных легкой пружиной жесткостью $k = 200$ Н/м. Одному из брусков сообщают скорость $v_0 = 1$ м/с в направлении второго бруска по линии, соединяющей их центры. Определите величину максимального растяжения $\Delta l$ пружины при последующем движении брусков.

3.81. * На гладкой горизонтальной плоскости удерживаются два бруска, соединенные легкой пружиной, растянутой на $x_0 = 2$ см. Бруски отпускают. Определите деформацию $x$ пружины в момент, когда бруски будут иметь скорости, равные половине максимальных скоростей, достигаемых при их движении.

3.82. * На гладком горизонтальном столе покоятся две шайбы массами $m$ и $2m$, соединенные легкой недеформированной пружинкой. Легкой шайбе сообщают скорость $V_0$ вдоль оси пружинки. Чему равна энергия $E$ деформации пружины в момент времени, когда скорость легкой шайбы, не изменив направления, уменьшится в три раза.?

3.83. ** На гладком горизонтальном столе покоятся две одинаковые шайбы, соединенные легкой недеформированной пружиной. Одной из шайб сообщают горизонтальную скорость $V$. Через некоторое время вектор скорости этой шайбы повернулся в горизонтальной плоскости на угол $\alpha = 45^0$, а по величине скорости шайб сравнялись. Найдите в этот момент времени энергию деформации пружины $E$.

3.84. ** На гладком горизонтальном столе удерживают две одинаковые шайбы, между которыми зажата легкая пружина (она не прикреплена к шайбам). Шайбы отпускают. Это не удалось сделать одновременно: сначала отпустили первую шайбу, а чуть позже вторую. После разлета шайб их максимальные кинетические энергии оказались равными $W_1$ и $W_2$. Определите энергию деформации пружины $W$ в тот момент, когда отпустили вторую шайбу.




3.85. * На горизонтальном столе у вертикальной стены покоится тележка массой $4m$. К закрепленной на тележке штанге на легкой нерастяжимой нити длиной $L = 90$ см подвешен груз, масса которого в $k = 4$ раза меньше массы тележки. Нить с грузом отклоняют от вертикали на угол $\alpha = 60^0$ и отпускают без начальной скорости. Найдите скорость груза $V$ в момент времени, когда он первый раз проходит нижнюю точку своей траектории. Рассмотреть случаи: а) груз отклоняют к стене, б) груз отклоняют от стены. Сопротивлением воздуха и трением пренебречь.

Неупругие удары

3.86. С высоты $H = 15$ м вертикально вниз бросили мяч массой $m = 0{,}5$ кг со скоростью $v_0 = 10$ м/с. При ударе мяча о землю выделилось $Q = 36$ Дж тепла. Определите скорость v мяча сразу после удара. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.87. Мяч массой $m = 0{,}2$ кг падает с нулевой начальной скоростью с высоты $H = 6$ м. При первом ударе о землю выделилось количество тепла $Q = 2$ Дж. Через какое время $\tau$ после первого удара произошел второй удар мяча о землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.88. Тело массой $m_1 = 1$ кг налетело со скоростью $v_1 = 10$ м/с на покоящееся тело массой $m_2 = 2$ кг и остановилось. Определите скорость $v_2$ второго тела после соударения и количество $Q$ тепла, выделившегося при ударе?

3.89. Тележка массой $m_2 = 2$ кг покоится на гладком горизонтальном столе. На нее со скоростью $v_1 = 2$ м/с налетает тележка массой $m_1 = 1$ кг. После лобового удара тяжелая тележка движется в ту же сторону со скоростью $v_2 = 1{,}2$ м/с. С какой скоростью v движется после удара легкая тележка? Какое количество тепла Q выделилось при ударе?

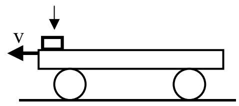
3.90. * При ударе шарика о гладкую горизонтальную поверхность теряется $\delta = 1/3$ часть его кинетической энергии. Угол падения шарика $\alpha = 45^0$. Найдите угол отражения $\beta$.

3.91. ** Шайба массы $m_1$, двигаясь поступательно по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на неподвижную шайбу массы $m_2$ и после удара скользит с вдвое меньшей скоростью в направлении, перпендикулярном первоначальному. При каких значениях $(m_1/m_2)$ возможно такое движение? Ответ дайте в виде неравенства.

3.92. Мальчик, опираясь о барьер, бросил горизонтально камень со скоростью $v_1$. Какую скорость $v_2$ он сможет сообщить камню, если будет бросать его горизонтально, стоя на коньках на гладком льду? Масса мальчика $M$, масса камня $m$. Считать, что в обоих случаях мальчик совершает одинаковую работу.

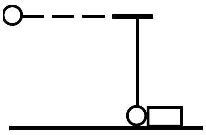
3.93. Конькобежец массой $m_0$ = 60 кг бросает в горизонтальном направлении камень массой $m_1$ = 2 кг со скоростью $v_1$ = 15 м/с относительно льда. На какое расстояние $s$ откатится при этом конькобежец? Коэффициент трения коньков о лед $\mu$ = 0,02.

3.94. * На передний конец тележки массой $M$ = 3 кг и длиной $l$ = 50 см, движущейся по инерции со скоростью v = 2 м/с по горизонтальной поверхности, осторожно кладут небольшой брусок массой $m$ = 1 кг. Соскользнет ли брусок с тележки, если коэффициент трения бруска о поверхность тележки $\mu$ = 0,1?

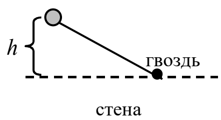



3.95. На горизонтальной поверхности стола покоится ящик. Пуля массой в $n$ = 50 раз меньше массы ящика летит горизонтально со скоростью $V_0$ = 400 м/с, пробивает ящик и продолжает лететь в прежнем направлении со скоростью вдвое меньшей. Коэффициент трения скольжения между ящиком и столом $\mu$ = 0,5. а) Какую скорость $V$ приобретает ящик сразу после вылета из него пули? б) Найдите время $t$ движения ящика по столу. Движение ящика считать поступательным.

3.96. На столе лежит шайба. На легкой нити длиной $L$ = 20 см висит шарик, касаясь шайбы. Нить вертикальна. Масса шайбы в $n$ = 5 раз больше массы шарика. Шарик отклоняют в сторону так, что нить занимает горизонтальное положение, и отпускают. После удара (который не является абсолютно упругим) о шайбу шарик останавливается. Найдите скорость шайбы $V$ сразу после удара.



3.97. ** К гвоздю, торчащему из вертикальной стены, подвесили на нитке длиной $l$ = 50 см стальной шарик радиусом около 1 см (такие есть в школьной лаборатории). Слегка натягивая нитку и перемещая ее параллельно стене, шарик подняли на высоту $h$ выше точки подвеса и без толчка отпустили. При каких значениях $h$ шарик после прохождения положения равновесия поднимется выше точки подвеса? Нитка обычная, но достаточно прочная и при



движении шарика не рвется. Со стеной шарик не соприкасается, а сопротивлением воздуха можно пренебречь.