1. КИНЕМАТИКА

Кинематика точки

Вектор скорости, модуль вектора скорости, вектор ускорения, модуль вектора ускорения.

$v_x = \dfrac{dx}{dt}$ - проекция вектора скорости на координатную ось X может быть найдена как производная координаты x по времени t;

$v = \left|\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right|$ - выражение модуля скорости через проекции вектора скорости на координатные оси;

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ - вектор скорости по определению – это производная радиус-вектора по времени;

$r = \left|\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right|$ - выражение модуля радиус-вектора материальной точки через ее координаты;

$\cos\varphi = \dfrac{(\vec{b},\vec{c})}{b \cdot c} = \dfrac{b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \cdot \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}}$ - косинус угла φ между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

$a = \left|\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right|$ - выражение модуля ускорения через проекции вектора ускорения на координатные оси;

$a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ - проекция вектора ускорения на координатную ось X может быть найдена как производная проекции скорости на эту ось по времени t.

1.1. Материальная точка движется вдоль координатной оси X по закону $x = 3t^2 - 2t^3$. Вычислите проекцию скорости материальной точки на ось X для момента $t = 1$ с.

1.2. Материальная точка движется со скоростью $\vec{v} = \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot t$. Вычислите модуль скорости материальной точки для момента времени $t = 2{,}67$ с.

1.3. Радиус-вектор материальной точки зависит от времени по закону $\vec{r} = \left(3\vec{i} + 2\vec{j}\right) \cdot t - 5\vec{j} \cdot t^2$. Найдите зависимости вектора и модуля вектора скорости от времени.

1.4. Начальная и конечная скорости материальной точки равны соответственно $\vec{v}_1 = \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ и $\vec{v}_2 = \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$. Вычислите Δv - приращение модуля скорости и $|\Delta\vec{v}|$ - модуль приращения скорости материальной точки.

1.5. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = t^2 - 6 \cdot t$$
$$y = 2{,}5 \cdot t$$

Вычислите величину v скорости материальной точки в позиции $x = y = 0$.

1.6. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = b \cdot t$$

$$y = c \cdot t - \frac{kt^2}{2}$$

Здесь *b*, *c* и *k* положительные постоянные. Найдите величину v скорости материальной точки как функцию времени.

1.7. Координаты *x* и *y* материальной точки зависят от времени по законам

$$x = R \cdot (\omega t - \sin \omega t)$$

$$y = R \cdot (1 - \cos\omega t)$$

где *R*, ω - положительные постоянные величины. Найдите величину v скорости материальной точки как функцию времени.

1.8. Координаты x и y материальной точки зависят от времени по законам

$$x = A \cdot \cos \omega t$$

$$y = B \cdot \sin \omega t,$$

где *A*, *B*, ω - постоянные величины. Найдите величину v скорости материальной точки в момент $\omega t = \pi/4$.

1.9. Закон движения материальной точки дан уравнениями:

$$x = b \cdot e^{kt}$$

$$y = c \cdot e^{-kt}$$

Найдите зависимость модуля скорости от модуля радиус-вектора материальной точки.

1.10. Радиус-вектор материальной точки зависит от времени по закону $\vec{r} = (\vec{i} + \vec{j}) \cdot t - 5\vec{j} \cdot t^2$. Вычислите угол φ между радиус-вектором и вектором скорости для момента *t* = 0,2 с.

1.11. Материальная точка движется вдоль координатной оси *X* по закону $x = 3t^2 - 2t^3$. Через сколько *t* времени после момента *t* = 0 с вектор ускорения материальной точки изменит направление на противоположное?

1.12. Координаты *x* и *y* материальной точки зависят от времени по законам

$$x = R \cdot (\omega t - \sin \omega t)$$

$$y = R \cdot (1 - \cos\omega t)$$

где *R*, ω - положительные постоянные величины. Найдите величину ускорения материальной точки.

1.13. Материальная точка движется со скоростью $\vec{v} = (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot t$. Вычислите модуль ускорения материальной точки.

1.14. Закон движения материальной точки дан уравнениями:

$$x = b \cdot e^{kt}$$

$$y = c \cdot e^{-kt}$$

Найдите зависимость вектора ускорения от радиус-вектора материальной точки.

1.15. Радиус-вектор материальной точки зависит от времени по закону $\vec{r} = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot t - 5\vec{j} \cdot t^2$. Вычислите угол φ между векторами скорости и ускорения для момента *t* = 0,2 с.

Траектория, уравнение траектории.

Траектория материальной точки – это геометрическое место положений конца радиус-вектора материальной точки. Чаще всего приходится искать уравнение траектории лежащей в плоскости, например в координатной плоскости *XY*. Для этого бывает достаточно (хотя и не всегда), располагая законами движения *x*(*t*) и *y*(*t*), исключить из этих уравнений время *t*. Если же траектория трехмерная, то можно найти уравнение ее проекции, например, на плоскость XY и отдельно рассмотреть движение вдоль оси Z.

1.16. Координаты x и y материальной точки зависят от времени по законам

$$x = A\cdot\cos\omega t \qquad y = B\cdot\sin\omega t,$$

где A, B, ω - постоянные величины. Найдите уравнение $y(x)$ траектории материальной точки и изобразите ее на рисунке.

1.17. Координаты x и y материальной точки зависят от времени по законам

$$x = 5\cdot\sin 3t \qquad y = 5(1-\cdot\cos 3t).$$

Найдите уравнение $y(x)$ траектории материальной точки и изобразите ее на рисунке.

1.18. Радиус-вектор материальной точки зависит от времени по закону $\vec{r} = 3\vec{i}\cdot\cos 2t + 5\vec{j}\cdot\sin 2t$. Найдите уравнение $y(x)$ траектории материальной точки и изобразите ее на рисунке.

1.19. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = t^2 - 6\cdot t$$
$$y = 2{,}5\cdot t$$

Получите уравнение $y(x)$ траектории материальной точки и изобразите ее на рисунке;

1.20. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = b\cdot t$$
$$y = c\cdot t - \frac{kt^2}{2}$$

Здесь b, c и k положительные постоянные. Получите уравнение траектории $y(x)$ и изобразите траекторию на рисунке.

1.21. Материальная точка движется со скоростью $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. В начальный момент координаты точки $x = y = 0$. Найдите уравнение $y(x)$ траектории материальной точки и изобразите ее на рисунке.

1.22. Материальная точка движется со скоростью $\vec{v} = 5\vec{i} + 2x\vec{j}$. В начальный момент координаты точки $x = y = 0$. Найдите уравнение $y(x)$ траектории материальной точки и изобразите ее на рисунке.

1.23. Закон движения материальной точки дан уравнениями:

$$x = b\cdot e^{kt}$$
$$y = c\cdot e^{-kt}$$

Найдите уравнение траектории.

1.24. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = R\cdot\cos\omega t \qquad y = R\cdot\sin\omega t, \qquad z = bt$$

где R, ω, b – положительные постоянные величины. Опишите, как выглядит траектория. Изобразите ее на рисунке.

1.25. Координаты x и y материальной точки зависят от времени по законам

$$x = R\cdot(\omega t - \sin\omega t)$$
$$y = R\cdot(1 - \cos\omega t)$$

где R, ω - положительные постоянные величины. Изобразите траекторию материальной точки на рисунке.

Длина пути.

$s = \int ds$ - длина пути *s* – это сумма элементарных длин пути *ds*; $ds = |d\vec{r}|$ - элементарная длина пути – это модуль вектора элементарного перемещения, то есть длина достаточно прямолинейного участка траектории, на котором, в соответствии с определением вектора скорости $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, как модуль скорости, так и направление вектора скорости в течение времени dt неизменны. В итоге получаем $ds = |d\vec{r}| = v(t) \cdot dt$.

В соответствии с этим определением, для нахождения длины пути прежде всего следует выяснить, нет ли на интересующем нас отрезке времени таких моментов, когда тело останавливается и начинает двигаться по той же траектории в противоположном направлении. Если такая особенность обнаружена, необходимо сначала вычислить длину пути до точки поворота, а затем после поворота и, наконец, сложить эти длины.

1.26. Материальная точка движется вдоль координатной оси *X*. Проекция скорости материальной точки на координатную ось описывается формулой $v_x = 4 - 10 \cdot t$. Вычислите длину пути, пройденного за время от момента *t* = 0 до момента *t* = 0,3 с.

1.27. Материальная точка движется вдоль координатной оси *X*. Проекция скорости материальной точки на координатную ось описывается формулой $v_x = 4 - 10 \cdot t$. Вычислите длину пути, пройденного за время от момента *t* = 0 до момента *t* = 0,7 с.

1.28. Материальная точка движется вдоль координатной оси *X* по закону $x = 5 \cdot \sin(\pi \cdot t)$. Вычислите длину пути этой точки от момента *t* = 0 до момента *t* = 1 с.

1.29. Материальная точка движется вдоль координатной оси *X* по закону $x = 5 \cdot \sin(\pi \cdot t)$. Вычислите длину пути этой точки от момента *t* = 0 до момента *t* = 2 с.

1.30. Материальная точка движется вдоль координатной оси *X* по закону $x = 5 \cdot \sin(\pi \cdot t)$. Вычислите длину пути этой точки от момента *t* = 0 до момента *t* = 1,5 с.

1.31. Точка движется в плоскости так, что проекции ее скорости на оси прямоугольной системы координат равны $v_x = 6\pi \cdot \cos(2\pi \cdot t)$, $v_y = 6\pi \cdot \sin(2\pi \cdot t)$. Вычислите длину пути, пройденного точкой за время от момента *t* = 0 до момента *t* = 1/π с.

1.32. Закон движения материальной точки задан уравнениями $x = \sqrt{2} \cdot \cos t$, $y = \sqrt{2} \cdot \sin t$, $z = 2 \cdot t$. Вычислите длину пути этой точки от момента *t* = 0 до момента *t* = 1 с.

1.33. Закон движения материальной точки задан уравнениями $x = \sqrt{2} \cdot \cos t$, $y = \sqrt{2} \cdot \sin t$, $z = 2 \cdot t - 0{,}5t^2$. Вычислите длину пути этой точки от момента *t* = 0 до момента *t* = 4 с.

1.34. Координаты *x* и *y* материальной точки зависят от времени по законам

$$x = R \cdot (\omega t - \sin \omega t)$$
$$y = R \cdot (1 - \cos \omega t)$$

где *R*, ω - положительные постоянные величины. Найдите длину пути этой точки от момента *t* = 0 до момента $t = 2\pi/\omega$.

1.35. Математический маятник (малое тяжелое тело, подвешенное на длинной легкой нити) отклонили от вертикали на угол Φ (это греческая буква « фи») и отпустили. Считая, что угол φ отклонения нити от вертикали $\varphi(t) = \Phi \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$, найдите длину пути, пройденного телом за время от момента $t = 0$ до момента $t = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Тангенциальное ускорение.

$a_t = \frac{d|\bar{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$ - тангенциальное (касательное) ускорение – это производная от модуля скорости по времени. Оно показывает, как быстро изменяется величина (модуль) скорости со временем. Для нахождения тангенциального ускорения сначала находим модуль скорости как функцию времени и затем дифференцируем эту функцию по времени.

1.36. Для экономии места, въезд на один из высочайших в Японии мостов устроен в виде винтовой линии, обвивающей цилиндр радиуса *R*. Полотно дороги составляет угол α с горизонтальной плоскостью. Найдите тангенциальное ускорение автомобиля, движущегося с постоянной по модулю скоростью.

1.37. Точка движется в плоскости так, что проекции ее скорости на оси прямоугольной системы координат равны $v_x = 6\pi \cdot \cos(2\pi \cdot t)$ $v_y = 6\pi \cdot \sin(2\pi \cdot t)$. Вычислите величину тангенциального ускорения точки, соответствующую моменту времени $t = 1/\pi$ с после старта.

1.38. Закон движения материальной точки задан уравнениями $x = \sqrt{2} \cdot \cos t$, $y = \sqrt{2} \cdot \sin t$, $z = 2 \cdot t$. Вычислите величину тангенциального ускорения точки, соответствующую моменту времени $t = 1$ с.

1.39. Небольшое тело бросили горизонтально со скоростью $v_0 = 3$ м/с в поле сил тяжести ($g = 10$ м/с^2). Вычислите величину тангенциального ускорения тела, соответствующую моменту времени $t = 0{,}4$ с после старта.

1.40. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = b \cdot t$$

$$y = c \cdot t - \frac{kt^2}{2}$$

Здесь *b*, *c* и *k* положительные постоянные. Найдите зависимость величины тангенциального ускорения от времени.

1.41. Закон движения материальной точки дан уравнениями $x = t^2 - 6 \cdot t$, $y = 2{,}5 \cdot t$.

Вычислите величину тангенциального ускорения точки, соответствующую моменту времени $t = 0$ с.

1.42. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = t^2 - 6 \cdot t$$

$$y = 2{,}5 \cdot t$$

Вычислите величину a_t тангенциального ускорения в точке $x = y = 0$.

1.43. Координаты *x* и *y* материальной точки зависят от времени по законам

$$x = A \cdot \cos \omega t$$

$$y = B \cdot \sin \omega t,$$

где *A*, *B*, ω - постоянные величины. Найдите величину a_t тангенциального ускорения для момента времени $\omega t = \pi/4$.

1.44. Математический маятник (малое тяжелое тело, подвешенное на длинной легкой нити) отклонили от вертикали на угол Ф (это греческая буква « фи») и отпустили. Изобразите вектор ускорения маятника в нижней точке. В крайней точке. Приблизительно в какой-нибудь промежуточной точке. Считая, что угол отклонения нити φ зависит от времени t по закону $\varphi(t) = \Phi \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$, найдите тангенциальное ускорение в точках φ = 0 и φ = Φ.

Нормальное ускорение.

Вектору скорости (как и другим векторам) присущи два атрибута (неотъемлемых свойства): модуль (длина) и направление в пространстве. Производная вектора скорости по времени показывающая, как быстро изменяется вектор скорости со временем, может быть представлена в виде суммы двух слагаемых. Одно из этих слагаемых показывает, как быстро изменяется величина скорости – это тангенциальное (касательное) ускорение. Другое слагаемое характеризует быстроту изменения направления скорости – это нормальное (перпендикулярное к касательной, проходящей через точку касания к траектории) ускорение. В средней школе это ускорение называют центростремительным. Таким образом, имеем $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$. Учитывая взаимную перпендикулярность векторов тангенциального и нормального ускорений, в соответствии с теоремой Пифагора, получаем полезную формулу $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$.

1.45. Закон движения материальной точки дан уравнениями $x = 3 \cdot t$, $y = 2 \cdot t^2$. Вычислите величину нормального ускорения, соответствующего времени *t = 0* с.

1.46. Точка движется в плоскости так, что проекции ее скорости на оси прямоугольной системы координат равны $v_x = 6\pi \cdot \cos(2\pi \cdot t)$, $v_y = 6\pi \cdot \sin(2\pi \cdot t)$. Вычислите величину нормального ускорения, соответствующего времени *t = 0,5* с.

1.47. Закон движения материальной точки задан уравнениями $x = \sqrt{2} \cdot \cos t$, $y = \sqrt{2} \cdot \sin t$, $z = 2 \cdot t$. Вычислите величину нормального ускорения, соответствующего времени t = 1 с.

1.48. Небольшое тело бросили горизонтально со скоростью v_0= 3 м/с в поле сил тяжести (g = 10 м/с^2). Вычислите величину нормального ускорения тела, соответствующего времени t = 0,4 с после старта.

1.49. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = t^2 - 6 \cdot t$$
$$y = 2{,}5 \cdot t$$

Вычислите величину a_n нормального ускорения, соответствующего времени *t = 0* с.

1.50. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = b \cdot t$$
$$y = c \cdot t - \frac{kt^2}{2}$$

Здесь b, c и k положительные постоянные. Найдите зависимость величины нормального ускорения от времени.

1.51. Координаты x и y материальной точки зависят от времени по законам

$$x = A \cdot \cos \omega t$$
$$y = B \cdot \sin \omega t,$$

где A, B, ω - постоянные величины. Найдите величину a_n нормального ускорения для момента $\omega t = \pi/4$.

1.52. Математический маятник (малое тяжелое тело, подвешенное на длинной легкой нити) отклонили от вертикали на угол Φ (это греческая буква « фи») и отпустили. Изобразите вектор ускорения маятника в нижней точке. В крайней точке. Приблизительно в какой-нибудь промежуточной точке. Считая, что угол отклонения нити φ зависит от времени t по закону $\varphi(t) = \Phi \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$, найдите нормальное ускорение в точках φ = 0 и φ = Φ.

1.53. Для экономии места, въезд на один из высочайших в Японии мостов устроен в виде винтовой линии, обвивающей цилиндр радиуса R. Полотно дороги составляет угол α с горизонтальной плоскостью. Найдите ускорение автомобиля, движущегося с постоянной по модулю скоростью v.

Радиус кривизны траектории.

Можно показать, что нормальное ускорение, характеризующее быстроту изменения направления скорости, связано с величиной скорости формулой $a_n = \frac{v^2}{\rho}$. Здесь ρ – радиус кривизны траектории. Отсюда получаем $\rho = \frac{v^2}{a_n}$. Именно такой формулой будем пользоваться для нахождения радиуса кривизны траектории в этом разделе.

1.54. Небольшое тело бросили горизонтально со скоростью v_0 = 5 м/с в однородном поле сил тяжести (g = 10 м/с^2). Вычислите радиус кривизны траектории в непосредственной близости от старта.

1.55. Небольшое тело бросили со скоростью v_0 = 4 м/с под углом α = 45^0 к горизонту. Вычислите радиус кривизны в верхней точке траектории. Ускорение тела направлено вертикально вниз и равно 10 м/с^2.

1.56. Точка движется в плоскости так, что проекции ее скорости на оси прямоугольной системы координат равны $v_x = 6\pi \cdot \cos(2\pi \cdot t)$, $v_y = 6\pi \cdot \sin(2\pi \cdot t)$. Вычислите радиус кривизны траектории.

1.57. Закон движения материальной точки задан уравнениями $x = \sqrt{2} \cdot \cos t$, $y = \sqrt{2} \cdot \sin t$, $z = 2 \cdot t$. Вычислите радиус кривизны траектории.

1.58. Координаты x и y материальной точки зависят от времени по законам

$$x = A \cdot \cos \omega t \qquad y = B \cdot \sin \omega t,$$

где A, B, ω - постоянные величины. Вычислите радиус кривизны траектории, соответствующий моменту времени $t = 0$ с.

1.59. Координаты x и у материальной точки зависят от времени по законам

$$x = A \cdot \cos \omega t$$
$$y = B \cdot \sin \omega t$$

Здесь A, B, ω - постоянные величины. Найдите радиус кривизны ρ траектории для момента $\omega t = \pi/4$.

1.60. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = t^2 - 6 \cdot t$$
$$y = 2{,}5 \cdot t$$

Вычислите радиус кривизны траектории, соответствующий моменту времени $t = 0$ с.

1.61. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = b \cdot t$$
$$y = c \cdot t - \frac{kt^2}{2}$$

Здесь b, c и k положительные постоянные. Найдите радиус кривизны траектории, соответствующий моменту времени t.

1.62. Координаты x и y материальной точки зависят от времени по законам

$$x = b\cdot\cos\omega t$$
$$y = c\cdot\sin\omega t,$$

где b, c, ω - положительные постоянные величины. Найдите радиус кривизны ρ траектории в точках $x = 0$, $y \neq 0$.

1.63. Закон движения материальной точки дан уравнениями

$$x = R\cdot\cos\omega t$$
$$y = R\cdot\sin\omega t,$$
$$z = bt$$

где R, ω, b – положительные постоянные величины. Найдите радиус кривизны ρ траектории материальной точки.

1.64. Координаты x и y материальной точки зависят от времени по законам

$$x = R\cdot(\omega t - \sin\omega t)$$
$$y = R\cdot(1-\cos\omega t)$$

где R, ω - положительные постоянные величины. Найдите радиус кривизны ρ в точке, где $y = 2R$.

1.65. Для экономии места, въезд на один из высочайших в Японии мостов устроен в виде винтовой линии, обвивающей цилиндр радиуса R. Полотно дороги составляет угол α с горизонтальной плоскостью. Найдите радиус кривизны траектории автомобиля.

Вращательное движение твердого тела вокруг постоянной оси

Угловая скорость, угловое ускорение.

При описании вращательного движения твердого тела, наряду с векторами перемещения любых точек твердого тела, вводят единый для всех точек вектор элементарного угла поворота $d\vec{\varphi}$. Кроме линейных скоростей точек твердого тела, вводят единую для всех точек угловую скорость $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$. Аналогично, наряду с линейными ускорениями точек, вводят единое для всех точек угловое ускорение $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$. Пригодится также формула, связывающая величину угловой скорости и частоты вращения (числа оборотов тела в единицу времени) $\omega = 2\pi n$.

1.66. Угол поворота твердого тела вокруг постоянной оси зависит от времени по закону $\varphi = 6t^3 + 2t$. Вычислите модуль угловой скорости ω и модуль углового ускорения β для момента τ = 2с после начала вращения.

1.67. Модуль угловой скорости тела, вращающегося вокруг постоянной оси, зависит от времени по закону $\omega = 6t + 2t^2$. Вычислите угол φ поворота тела за время от t_1 = 1с до t_2 = 5с.

1.68. Диск, вращающийся равнозамедленно с частотой n = 10 с$^{-1}$,останавливается за время τ = 100с. Вычислите модуль углового ускорения β диска и угол φ, на который повернется диск за это время.

1.69. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости $\omega = 20\sqrt{\pi}$ рад/с через N = 10 оборотов после начала вращения. Вычислите величину β углового ускорения колеса.

1.70. Угол поворота диска вокруг постоянной оси зависит от времени по закону $\varphi = 200\pi\left(t - 5t^2\right)$. Вращение диска начинается в момент t = 0. Вычислите количество оборотов N , которое сделает диск до момента изменения направления вращения.

1.71. Диск вращается вокруг неподвижной оси, причем угол поворота зависит от времени по закону $\varphi = 2\pi\left(3t - t^3\right)$. Вычислите модуль углового ускорения β для момента остановки диска.

Связь угловых характеристик движения с линейными.

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \qquad v = \omega \cdot R;$$

$$\vec{a}_t = [\vec{\beta}, \vec{r}], \qquad a_t = \beta \cdot R;$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]], \qquad a_n = \omega^2 \cdot R.$$

Здесь $\vec{r}$ - радиус – вектор, рассматриваемой точки твердого тела, начинающийся в любой точке оси вращения; R – расстояние от рассматриваемой точки твердого тела до оси вращения.

1.72. Диск радиуса R = 0,3м начинает вращаться с постоянным угловым ускорением β = 2рад/с^2. Вычислите тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки обода диска для момента времени t = 5с.

1.73. Угол поворота диска вокруг постоянной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, зависит от времени по закону $\varphi = t^2 / 2$. Вычислите полное линейное ускорение a точки диска, удаленной от его центра на расстояние $r = \sqrt{2}$ м для момента времени t = 1 с.

1.74. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением β = 0,5 рад/с^2. Через время $t = \sqrt{2}$ с после начала вращения, величина линейного ускорения точек обода колеса достигла a = 1 м/с^2 . Вычислите радиус R колеса.

1.75. Диск радиуса R = 0,4м начинает вращаться в соответствии с уравнением $\varphi = 3 - 1{,}5 \cdot t + 0{,}2 \cdot t^2$. Вычислите тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки обода диска для момента времени t = 2с.

1.76. Диск начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя. Вычислите угол, который составит вектор полного линейного ускорения любой точки диска с его радиусом, проходящим через эту точку, в тот момент, когда маховик сделает первый оборот.

Кинематика относительного движения (Галилей, Кориолис)

Два наблюдателя, каждый из своей системы отсчета (СО), изучают движение материальной точки (точка, не знает о том, что за ней наблюдают). Поместим себя в одну из этих СО, для нас она будет “неподвижной”, то есть мы относительно этой СО покоимся. Будем называть эту систему отсчета *K* – СО. Другой наблюдатель покоится в *K′*-СО, которая движется произвольно относительно *K* – СО и поэтому *K* наблюдатель называет ее движущейся. Как известно, произвольное движение твердого тела (в данном случае системы отсчета) можно представить в виде суперпозиции поступательного и вращательного движений.

Введем следующие обозначения:

$\vec{v}$, $\vec{a}$ - скорость и ускорение материальной точки относительно *K - CO* ;

$\vec{v}'$, $\vec{a}'$ - скорость и ускорение материальной точки относительно *K′ - CO;*

$\vec{r}'$ - радиус-вектор материальной точки относительно *K′ - CO;*

$\vec{V}$, $\vec{A}$ - скорость и ускорение *K′ - CO* относительно *K – CO* в поступательном движении;

$\vec{\Omega}$, $\vec{\mathrm{B}}$ - угловая скорость и угловое ускорение *K′ - CO* относительно *K – CO* во вращательном движении.

Тогда *формула пересчета скорости из движущейся K′ - CO в «неподвижную» K – CO имеет вид*:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}'],$$

то есть, скорость материальной точки относительно “неподвижной” *К – СО* складывается из скорости материальной точки относительно движущейся *К′- СО* и скорости $\vec{V} + \left[\vec{\Omega}, \vec{r}\,'\right]$ точки *К′- СО*, через которую проходит (в этот момент) материальная точка, относительно *К – СО*.

Формула пересчета ускорения из движущейся К′- СО в «неподвижную» К - СО

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \left[\vec{B}, \vec{r}\,'\right] + \left[\vec{\Omega}\left[\vec{\Omega}, \vec{r}\,'\right]\right] + 2\left[\vec{\Omega}, \vec{v}'\right]$$

тоже утверждает, что ускорение материальной точки относительно “неподвижной” *К – СО* складывается из ускорения материальной точки относительно движущейся *К′- СО* и ускорения $\vec{A} + \left[\vec{B}, \vec{r}\,'\right] + \left[\vec{\Omega}\left[\vec{\Omega}, \vec{r}\,'\right]\right]$ точки *К′- СО*, через которую проходит (в этот момент) материальная точка, относительно *К – СО*. Однако, есть еще одно знаменитое пересчетное слагаемое – это поворотное или Кориолисово ускорение $2\left[\vec{\Omega}, \vec{v}'\right]$. Оно связано, во-первых, с тем, что вектор $\vec{v}'$ поворачивается вместе с *К′- СО* и, во-вторых, с тем, что из-за перемещения материальной точки относительно *К′- СО*, изменяется радиус-вектор $\vec{r}\,'$, а значит и скорость $\left[\vec{\Omega}, \vec{r}\,'\right]$.

1.77. Колесо радиуса 0,1 м катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Скорость оси колеса постоянна и равна 2 м/с. Вычислите скорость и ускорение точки обода колеса, находящейся в данный момент в контакте с поверхностью, относительно поверхности.

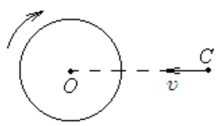
1.78. Материальная точка движется вдоль координатной оси X относительно лабораторной системы отсчета со скоростью 3 м/с. Вторая система отсчета вращается относительно лаборатории с угловой скоростью 4 рад /с, вектор которой перпендикулярен оси X, причем ось вращения и ось X пересекаются в точке $x = 0$. Вычислите величину скорости материальной точки относительно вращающейся системы отсчета в момент, когда $x = 1$ м.

1.79. Колесо радиуса 0,1 м катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Скорость оси колеса постоянна и равна 2 м/с. Вычислите скорость, ускорение и радиус кривизны траектории верхней точки обода колеса в системе отсчета, связанной с горизонтальной поверхностью.

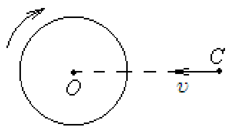
1.80. Круглая горизонтальная платформа вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$ относительно лаборатории. По краю платформы идет человек в направлении противоположном ее вращению. Угловая скорость человека $\vec{\omega}'$ относительно платформы постоянна, причем $\Omega = \omega'$. Найдите ускорение $\vec{a}$ человека относительно лаборатории.

1.81. Над экватором Земли движется спутник в сторону ее суточного вращения. Скорость спутника в гелиоцентрической системе отсчета $v_1 = 16$ км/с, а скорость точек экватора (в той же системе отсчета) $v_2 = 0{,}465$ км/с. Найдите ускорение $\vec{a}'$ спутника относительно Земли. Радиус Земли $R_2 = 6{,}4 \cdot 10^3$ км, радиус орбиты спутника $R_1 = 25{,}6 \cdot 10^3$ км.

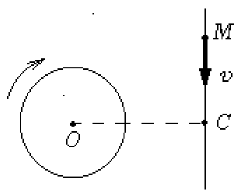
1.82. Диск вращается с постоянной угловой скоростью Ω = 3 рад/с вокруг перпендикулярной диску оси, проходящей через точку O. Материальная точка C движется в направлении CO относительно лаборатории с постоянной скоростью v = 7 м/с. Найдите модуль скорости $\vec{v}'$ точки C относительно диска в момент, когда OC = 8 м.



1.83. Диск вращается с постоянной угловой скоростью Ω = 3 рад/с вокруг перпендикулярной диску оси, проходящей через точку O. Материальная точка C движется в направлении CO относительно лаборатории с постоянной скоростью v = 7 м/с. Найдите модуль ускорения $\vec{a}'$ точки C относительно диска в момент, когда OC = 8 м.



1.84. Диск вращается с постоянной угловой скоростью Ω = 3 рад/с вокруг перпендикулярной диску оси, проходящей через его центр O. Ось диска покоится относительно лаборатории. Материальная точка M движется относительно лаборатории по прямой, лежащей в плоскости диска на расстоянии OC = 8 м от центра диска, с постоянной скоростью v = 7 м/с. Найдите модуль скорости $\vec{v}'$ и модуль ускорения $\vec{a}'$ точки M относительно диска в момент, когда она проходит позицию C.



1.85. Горизонтальный диск вращают относительно лаборатории с постоянной угловой скоростью $\Omega = \sqrt{2}$ 1/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров диска удаляется от его центра небольшое тело с постоянной относительно диска скоростью v' = 1 м/с. Найдите скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ тела относительно лаборатории в тот момент, когда оно находится на расстоянии r = 2 м от оси вращения.

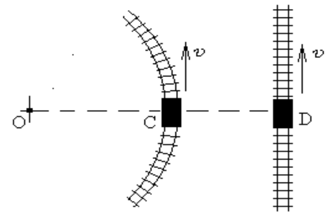
Скоростью (ускорением) материальной точки C относительно материальной точки D называется скорость (ускорение) точки C относительно системы отсчета, в которой точка D покоится.

1.86. Две окружности лежат в одной плоскости и имеют общий центр. Точка C движется по окружности радиуса R со скоростью v. Точка D движется в ту же сторону, что и точка C по окружности радиуса $2R$ со скоростью $2v$. Найдите скорость $\vec{v}'$ и ускорение $\vec{a}'$ точки D относительно точки C, для того момента, когда точки C, D и центр окружности окажутся на одной прямой.

1.87. Материальная точка 1 движется со скоростью $\vec{v}_1$ по окружности радиуса R ,а материальная точка 2 – по радиусу окружности к ее центру со скоростью $\vec{v}_2$. В некоторый момент точки оказались на одной прямой. Найдите скорость $\vec{v}'$ и ускорение $\vec{a}'$ точки 2 относительно точки 1,если расстояние от точки 1 до точки 2 равно R.

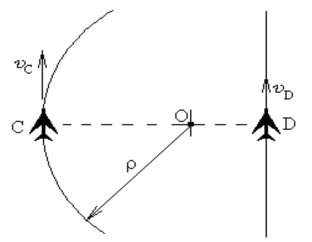
1.88. Тележка 1 движется относительно лаборатории с постоянной по модулю скоростью v_1 по окружности радиуса R, а тележка 2 - по прямой с постоянной скоростью v_2. Обе траектории лежат в одной плоскости, причем, прямая удалена от центра окружности на расстояние ($R + d$). Найдите скорость $\vec{v}_2'$ и ускорение $\vec{a}_2'$ тележки 2 относительно тележки 1 в момент времени, когда обе тележки одновременно пересекают радиальную линию, перпендикулярную траектории тележки 2.

1.89. Вагон C движется по закруглению радиусом OC = 0,5км,

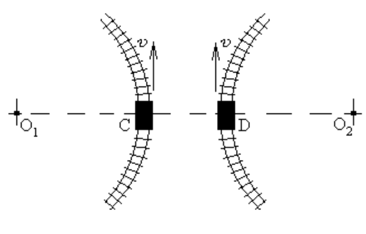


а вагон D – прямолинейно. Расстояние CD равно 0,2км, а скорость каждого вагона v равна 60км/ч. Найдите скорость v' и ускорение a' вагона D относительно вагона C.

1.90. Самолет C движется с постоянной скоростью v_c = 768км/ч по дуге окружности радиуса ρ = 1,6км; пилот видит справа по курсу на расстоянии CD = 2,4км другой самолет D. Предполагая, что скорость самолета D равна v_D = 320км/ч, найдите скорость v' и ускорение a' самолета D относительно самолета C.



1.91. Вагоны C и D движутся по закруглениям радиусами $O_1C = O_2D$ = 0,5км. Расстояние CD = 0,2км, а скорость каждого вагона v = 60км/ч. Найдите скорость v' и ускорение a' вагона D относительно вагона C.



1.92. По краю равномерно вращающейся круглой горизонтальной платформы идет человек с постоянной по величине относительно платформы скоростью. Учитывая, что величина ускорения человека относительно платформы равна a' = 0,5 м/с^2, а величина ускорения точки платформы, через которую в данный момент времени проходит человек, относительно лаборатории равна a^* = 2 м/с^2, найдите ускорение a человека относительно лаборатории.

Ответы

1.1. $v_x = 0$.

1.2. $v \approx 1$ м/с.

1.3. $\vec{v} = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot (1 - 5 \cdot t) \cdot \vec{j}$;

$v = \sqrt{13 - 40 \cdot t + 100 \cdot t^2}$.

1.4. $\Delta v \approx -2$ м/с;

$|\Delta \vec{v}| \approx 2{,}2$ м/с.

1.5. $v = 6{,}5$ м/с.

1.6. $v(t) = \sqrt{b^2 + (c - kt)^2}$.

1.7. $v(t) = R\omega\sqrt{2 \cdot (1 - \cos\omega t)}$.

1.8. $v = \dfrac{\omega}{2}\sqrt{A^2 + B^2}$.

1.9. $v = k \cdot r$.

1.10. $\varphi = 45^0$.

1.11. $t = 0{,}5$ с.

1.12. $a = R \cdot \omega^2$.

1.13. $a \approx 3{,}7$ м/с^2.

1.14. $\vec{a} = k^2 \cdot \vec{r}$.

1.15. $\varphi = 90^0$.

1.16. $y = B \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{A}\right)^2}$, или $\left(\dfrac{x}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{B}\right)^2 = 1$.

1.17. $x^2 + (y - 5)^2 = 25$.

1.18. $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{5}\right)^2 = 1$.

1.19. $x = \dfrac{y^2}{6{,}25} - \dfrac{6y}{2{,}5}$.

1.20. $y = \dfrac{c}{b} \cdot x - \dfrac{k}{2b^2} \cdot x^2$.

1.21. $y = 1{,}5 \cdot x$.

1.22. $y = 0{,}2 \cdot x^2$.

1.23. $y = \dfrac{b \cdot c}{x}$.

1.24. Траектория – винтовая линия.

1.25. Траектория – циклоида.

1.26. $s = 0{,}75$ м.

1.27. $s = 1{,}25$ м.

1.28. $s = 10$ м.

1.29. $s = 20$ м.

1.30. $s = 15$ м.

1.31. $s = 6$ м.

1.32. $s \approx 2{,}4$ м.

1.33. $s = \int\limits_0^4 v(t) \cdot dt = \int\limits_0^4 \sqrt{2 + (2 - t)^2} \cdot dt \approx 7{,}3$ м.

1.34. $s = 8R$.

1.35. $s = \Phi \cdot l$.

1.36. $a_t = 0$.

1.37. $a_t = 0$.

1.38. $a_t = 0$.

1.39. $a_t = \dfrac{g^2 \cdot t}{\sqrt{v_0^2 + (gt)^2}} = 8$ м/с^2.

1.40. $a_t = -\dfrac{k \cdot (c - kt)}{\sqrt{b^2 + (c - kt)^2}}$.

1.41. $a_t \approx -1{,}8$ м/с^2.

1.42. $a_t \approx -1{,}8$ м/с^2.

1.43. $a_t = \dfrac{\omega^2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{A^2 - B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

1.44. $a_t(\varphi = 0) = 0$;

$a_t(\varphi = \Phi) = -g \cdot \Phi$.

1.45. $a_n = 4$ м/с^2.

1.46. $a_n = 12 \cdot \pi^2 \approx 118$ м/с^2.

1.47. $a_n = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ м/с^2.

1.48. $a_n = \dfrac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2}} = 6$ м/с^2.

1.49. $a_n = \dfrac{5}{\sqrt{(2t - 6)^2 + 6{,}25}} \approx 0{,}77$ м/с^2.

1.50. $a_n = \dfrac{k \cdot b}{\sqrt{b^2 + (c - kt)^2}}$.

1.51. $a_n = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \omega^2 \cdot \dfrac{A^2 \cdot B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

1.52. $a_n(\varphi = 0) = \Phi^2 \cdot g$;

$a_n(\varphi = \Phi) = 0$.

1.53. $a = \dfrac{v^2 \cdot \cos^2 \alpha}{R}$.

1.54. $\rho = 2{,}5$ м.

1.55. $\rho = \dfrac{(v \cdot \cos\alpha)^2}{g} = 0{,}4$ м.

1.56. $\rho = 3$ м.

1.57. $\rho = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2$ м.

1.58. $\rho = \dfrac{B^2}{A}$.

1.59. $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{\left(A^2 + B^2\right)^{3/2}}{A \cdot B}$.

1.60. $\rho \approx 55$ м.

1.61. $\rho = \dfrac{\left(b^2 + (c - kt)^2\right)^{3/2}}{k \cdot b}$.

1.62. $\rho = \dfrac{b^2}{c}$.

1.63. $\rho = R + \dfrac{b^2}{R \cdot \omega^2}$.

1.64. $\rho = 4R$.

1.65. $\rho = \dfrac{R}{\cos^2\alpha}$.

1.66. $\omega = 74$ рад/с;

$\beta = 72$ рад/с^2.

1.67. $\varphi \approx 145$ рад.

1.68. $\beta = \dfrac{2\pi \cdot n}{\tau} \approx 0{,}63$ рад/с^2;

$\varphi = \pi \cdot n \cdot \tau \approx 3{,}1 \cdot 10^3$ рад.

1.69. $\beta = \dfrac{100}{N} = 10$ рад/с^2.

1.70. $N = 5$.

1.71. $\beta \approx 38$ рад/с^2.

1.72. $a_t = \beta \cdot R = 0{,}6$ м/с^2;

$a_n = \beta^2 \cdot t^2 \cdot R = 30$ м/с^2;

$a = \beta \cdot R \cdot \sqrt{1 + \beta^2 \cdot t^4} \approx 30$ м/с^2.

1.73. $a = 2$ м/с^2.

1.74. $R = \dfrac{a}{\beta \cdot \sqrt{1 + \beta^2 \cdot t^4}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$ м.

1.75. $a_t = \beta \cdot R = 0{,}16$ м/с^2;

$a_n = \omega^2 \cdot R = 0{,}196$ м/с^2;

$a = R \cdot \sqrt{\beta^2 + \omega^4} \approx 0{,}25$ м/с^2.

1.76. $\alpha = arctg\left(\frac{1}{4\pi}\right) \approx arctg(0{,}08) \approx 0{,}08ðàä \approx 4{,}6^0$.

1.77. $v = 0$;

$a = 40$ м/с^2, вектор ускорения направлен к центру колеса.

1.78. $v' = \sqrt{v^2 + (x \cdot \Omega)^2} = 5$ м/с.

1.79. $v = 4$ м/с;

$a = 40$ м/с^2, вектор ускорения направлен к центру колеса;

$\rho = 4R = 0{,}4$ м.

1.80. $a = 0$.

1.81. $a' = \frac{v_1^2}{R_1} + \frac{v_2^2}{R_2^2} \cdot R_1 - 2 \cdot v_1 \cdot \frac{v_2}{R_2} \approx 7{,}8$ м/с^2.

1.82. $v' = \sqrt{v^2 + (\Omega \cdot OC)^2} = 25$ м/с.

1.83. $a' = \Omega \cdot \sqrt{4v^2 + (\Omega \cdot OC)^2} \approx 83$ м/с^2.

1.84. $v' = |v - \Omega \cdot OC| = 17$ м/с;

$a' = \Omega \cdot |2v - \Omega \cdot OC| = 30$ м/с^2.

1.85. $v = \sqrt{(v')^2 + (\Omega r)^2} = 3$ м/с;

$a = \Omega \cdot \sqrt{(\Omega r')^2 + 4(v')^2} \approx 5$ м/с^2.

1.86. $v' = 0$;

$a' = 0$.

1.87. $v' = \sqrt{4v_1^2 + v_2^2}$;

$a' = \frac{2v_1}{R} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

1.88. $v_2' = \left| v_2 - (R + d) \cdot \frac{v_1}{R} \right|$;

$a' = \frac{v_1}{R} \cdot \left| \frac{v_1}{R}(R + d) - 2v_2 \right|$.

1.89. $v' = \frac{CD}{OC} \cdot v = 24êì / ÷ \approx 6{,}7$ м/с;

$a' = \left(\frac{v}{OC}\right)^2 \cdot (OD - 2 \cdot CD) = 4320êì / ÷^2 \approx 0{,}33$ м/с^2.

1.90. $v' = \left(\frac{CD}{\rho} - 1\right) \cdot v_C - v_D = 64êì / ÷ \approx 17{,}8$ м/с;

$a' = \frac{v_C}{\rho} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{CD}{\rho} - 1\right) \cdot v_C - 2 \cdot v_D\right) = 245760êì / ÷^2 \approx 19$ м/с^2.

1.91. $v' = \frac{CD}{O_1C} \cdot v = 24êì / ÷ \approx 6{,}7$ м/с;

$$a' = \frac{v^2}{O_2D} + \frac{v^2}{O_1C} - \left(\frac{v}{O_1C}\right)^2 \cdot CD = 11520 \hat{e}\grave{i} \; / \; \div^2 \approx 0{,}89 \text{ м/с}^2.$$

1.92. $a = a' + a^* + 2 \cdot \sqrt{a^* \cdot a'} = 4{,}5\,\text{м/с}^2.$