ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Определение амплитуды и начальной фазы колебаний из начальных условий

8.5. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль координатной оси X около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $t = 0$ координата и проекция скорости равны $x_0 = 0$ и $\upsilon_{x0} = 0{,}1$ м/с. Найдите проекцию скорости υ_x материальной точки для момента времени $t = 2{,}4$ с.

Решение.

Запишем закон движения точки при гармонических колебаниях

$$x = A\cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем зависимость скорости от времени:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha).$$

Из начальных условий следует:

$$x_0 = x_{|t=0} = 0 = A\cos\alpha,$$

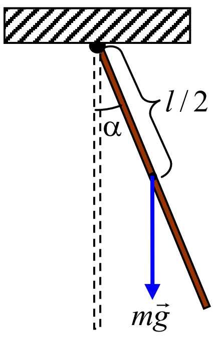
$$\upsilon_{x0} = \upsilon_{x|t=0} = -A\omega\sin\alpha.$$

Уравнение $\cos\alpha = 0$ имеет корни $\pm\pi/2$. Амплитуда $A > 0$, поэтому из уравнения $\upsilon_{x0} = -A\omega\sin(\alpha)$ следует, что $A = -\pi/2$ и $A\omega = \upsilon_{x0}$. Итак,

$$\upsilon_x(t) = -\upsilon_{x0}\sin(\omega t - \pi/2) = \upsilon_{x0}\cos(\omega t) = 0{,}1\cos 9{,}6 \approx 0{,}1\cos(3\pi) = -0{,}1 \text{ м/с.}$$

Определение частоты или периода гармонических колебаний

8.15. Однородный стержень длины l совершает малые колебания в поле сил тяжести вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его верхний конец. Пренебрегая трением, найдите период колебаний угла отклонения стержня от вертикали.



Решение.

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения стержня вокруг неподвижной оси:

$$I_z\beta = M_z,$$

где

$$I_z = ml^2/3$$

- момент инерции стержня относительно оси вращения Z,

$$\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''$$

- угловое ускорение (вторая производная от угла отклонения α),

$$M_z = -\frac{mgl}{2}\sin\alpha$$

- момент силы тяжести относительно оси Z. В формуле для M_z стоит знак минус, потому что момент силы тяжести приводит к уменьшению угла α (более строго: если повороту стержня против часовой стрелки соответствует положительный угол α, то ось Z направ-

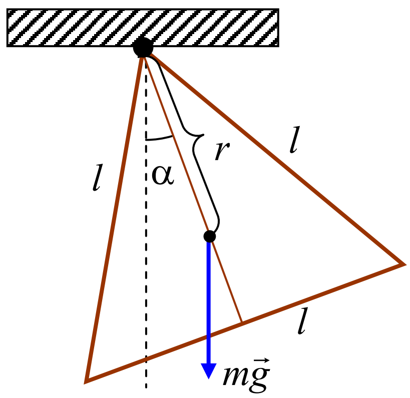
лена «на нас» перпендикулярно плоскости чертежа и проекция вектора момента силы тяжести на эту ось отрицательна).
При малых амплитудах колебания $\alpha << 1$ и $\sin\alpha \approx \alpha$. Тогда из приведенных выше уравнений следует

$$\alpha'' + \left(\frac{3g}{2l}\right)\alpha = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение вида $\alpha''+\omega^2\alpha = 0$. Решением этого уравнения являются гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{3g/2l}$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

8.19. Три однородных одинаковых стержня длины l каждый, образуют треугольник, подвешенный в поле сил тяжести в точке O. Треугольник может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения треугольника от положения равновесия.



Решение.

Равнодействующая сил тяжести, действующих на треугольник, приложена к его центру масс, который расположен в точке пересечения медиан. При колебаниях центр масс будет перемещаться по окружности радиуса $r = l/\sqrt{3}$. Запишем основное уравнение динамики вращательного движения треугольника вокруг неподвижной оси:

$$I_z\beta = M_z,$$

где

$$I_z = \frac{ml^2}{3} + \frac{ml^2}{3} + \left(\frac{ml^2}{12} + mh^2\right)$$

- суммарный момент инерции трех стержней относительно оси вращения Z,

$$h^2 = l^2 - (l/2)^2 = (3/4)l^2,$$

m - масса одного стержня,

$$\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''$$

- угловое ускорение (вторая производная от угла отклонения α),

$$M_z = -3mgr \cdot \sin\alpha$$

- момент силы тяжести относительно оси Z. Учитывая, что при малых колебаниях $\sin\alpha \approx \alpha$, после простых преобразований получим

$$\alpha'' + \left(\frac{2g}{l\sqrt{3}}\right)\alpha = 0.$$

Следовательно, $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{l\sqrt{3}}}$.

8.36. Частица массы m находится в одномерном поле консервативных сил и потенциальная энергия ее взаимодействия с полем зависит от координаты x как $U(x) = a/x^2 - b/x$, где a и b - положительные постоянные. Определите значение координаты x_0, соответствующее положению устойчивого равновесия. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний частицы.

Решение.

При помощи соотношения $\vec{F} = -\mathrm{grad}(U)$ найдем силу, действующую на частицу:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = \frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2} = \frac{2a - bx}{x^3}.$$

Из этого выражения видно, что сила равна нулю при $x = x_0 = 2a/b$. Заметим также, что при $x < x_0$ проекция силы $F_{x.} > 0$, а при $x > x_0$ проекция $F_{x.} < 0$. Следовательно, x_0 - координата устойчивого положения равновесия (при отклонении частицы из этого положения возникает сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия).

Выражение для силы представим в виде

$$F_x = -\frac{b(x - x_0)}{x^3} = -k \cdot \Delta x,$$

где $\Delta x = x - x_0$ - смещение из положения равновесия, $k = b/x^3$. При малых отклонениях от положения равновесия можно считать

$$k \approx \frac{b}{x_0^3} = \frac{b^4}{8a^3} = const.$$

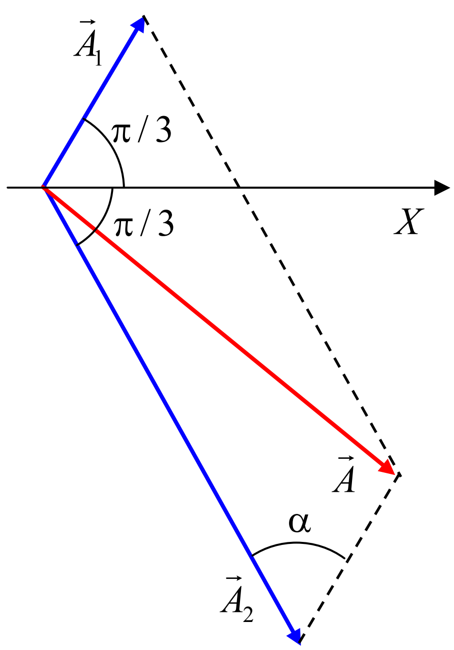
Следовательно, частица совершает вблизи положения равновесия малые гармонические колебания с собственной частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{b^2}{\sqrt{8ma^3}}.$$

Сложение гармонических колебаний методом векторных диаграмм.

8.43. С помощью векторной диаграммы найдите амплитуду x_m колебания, являющегося суммой двух колебаний

$$x_1 = 3 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right), \qquad x_2 = 8 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$



Решение. Сначала преобразуем x_2:

$$x_2 = 8 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = 8 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 8 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right),$$

затем построим векторную диаграмму (рис.): изобразим векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ такие, что $|\vec{A}_1| = 3$, $|\vec{A}_2| = 8$, а углы наклона векторов к оси X равны соответственно π/3 и $-\pi/3$. Построим вектор $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ и по теореме косинусов найдем модуль этого вектора:

$$x_m = |\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\alpha} = 7 \text{ м}.$$

Затухающие колебания

8.71. Уравнение движения маятника приведено к виду $\ddot{x} + 10\dot{x} + 425x = 0$. За какое время механическая энергия маятника уменьшится в 2,7 раза ?

Решение.

Сопоставляя заданное уравнение с уравнением затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

находим $\beta = 5$. Энергия E затухающих колебаний уменьшается со временем по закону

$$E = E_0 e^{-2\beta t}.$$

Следовательно, в $e \approx 2{,}7$ раз энергия уменьшится при $2\beta t = 1$, то есть за время

$$t = \frac{1}{2\beta} = 0{,}1 \text{ с}.$$

8.79. Затухающие колебания материальной точки происходят по закону $x(t) = x_{m0} \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$. Найдите амплитуду смещения и скорость точки для момента времени $t = 0$.

Решение.

Амплитуда смещения при затухающих колебаниях по определению равна

$$A(t) = x_{m0} \cdot e^{-\beta \cdot t} = x_{m0}.$$

Скорость точки найдем дифференцированием:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = x_{m0} e^{-\beta t}\left(-\beta \sin\omega t + \omega\cos\omega t\right).$$

При $t = 0$ получим $\upsilon_x(0) = x_{m0}\omega$.

Вынужденные колебания

8.86. Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах $\omega_1 =$ 400 с$^{-1}$ и $\omega_2 =$ 600 с$^{-1}$ равны друг другу. Найдите частоту ω, при которой амплитуда смещения максимальна.

Решение. Амплитуда вынужденных колебаний определяется формулой

$$x_m = \frac{(F_m / m)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

где F_m - амплитуда вынуждающей силы, ω - частота вынужденных колебаний (частота внешнего воздействия), ω_0 - частота собственных колебаний, β - коэффициент затухания, m - масса материальной точки. Из условия задачи следует:

$$\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_1^2 = \left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_2^2. \qquad (1)$$

Амплитуда вынужденных колебаний максимальна при резонансной частоте

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) после преобразований получим ответ

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} \approx 510 \text{ с}^{-1}.$$