Импульс. Центр масс. Закон сохранения импульса.

Решения некоторых задач

1. Величина импульса материальной точки равна $p_1 = 100$ кг·м/с. Под действием постоянной силы за время $\Delta t = 1{,}4$ секунды вектор импульса повернулся на 90^0. Вычислите величину силы.

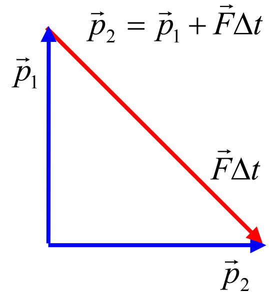
Решение

Из уравнения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

при постоянной силе $\vec{F}$ следует

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^{\Delta t} \vec{F}dt = \vec{F}\int_0^{\Delta t} dt = \vec{F}\Delta t\,.$$



Из рисунка, на котором изображены векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ и $\vec{F}\Delta t$, видно, что

$$p_1^2 + p_2^2 = (F\Delta t)^2\,.$$

Следовательно, $F = \dfrac{p_1\sqrt{2}}{\Delta t} \approx 100$ Н

2. Система состоит из двух тел. Известны зависимости от времени импульсов этих тел $\vec{p}_1 = (2t+3)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{p}_2 = -2t\vec{i} + t\vec{j}$. Найдите сумму внешних сил, приложенных к телам, и вычислите ее величину для t = 1/6 с.

Решение

Найдем импульс системы тел:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 3\vec{i} + (3t^2 + t)\vec{j} + 7\vec{k}\,,$$

а затем сумму внешних сил:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = (6t+1)\vec{j}\,,\ F = 2\text{ Н}.$$

3. Пустая тележка движется по горизонтальным прямолинейным рельсам со скоростью $\upsilon =$ 10 м/с. По ходу движения тележки, над рельсами на достаточной высоте закреплен бункер с песком. В момент прохождения тележки под бункером из него в тележку высыпался песок, масса которого равна массе пустой тележки. Вычислите конечную скорость $\upsilon_к$ тележки. Трением о рельсы и сопротивлением воздуха пренебречь.

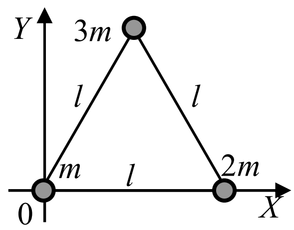
Решение

Направим горизонтальную ось X вдоль начальной скорости тележки. В отсутствии трения и сопротивления воздуха проекция на ось X внешних сил, действующих на систему «тележка-песок», равна нулю. Поэтому проекция импульса системы на эту ось остается неизменной:

$$m\upsilon = (m+m)\upsilon_к\,.$$

Отсюда $\upsilon_к = \upsilon/2 = 5$ м/с.

4. Три шарика массами m, $2m$ и $3m$ скреплены тремя легкими стержнями длины l каждый. Определите y – координату центра масс этой системы (см. рис.)



Решение

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3ml(\sqrt{3}/2)}{6m} = l\frac{\sqrt{3}}{4}$$

5. По гладкому горизонтальному столу движутся два одинаковых бруска, соединенные легкой растяжимой нитью. В некоторый момент времени величина скорости центра масс этой системы равна V_c, а величина скорости первого бруска – V_1, причем векторы $\vec{V}_c$ и $\vec{V}_1$ взаимно перпендикулярны. Определите для этого момента времени модуль вектора скорости V_2 второго бруска.

Решение

Импульс системы можно выразить через скорость центра масс

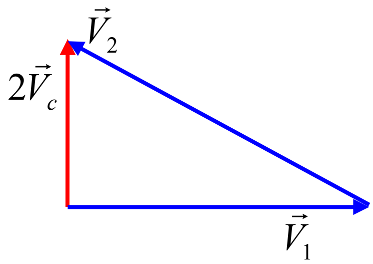
$$\vec{p} = (m+m)\vec{V}_c$$

или через скорости тел, входящих в систему

$$\vec{p} = m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 .$$

Из этих формул следует (при одинаковых массах)

$$2\vec{V}_c = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 .$$



Изобразим это уравнение графически (см. рис.) и найдем

$$V_2 = \sqrt{(2V_c)^2 + V_1^2} .$$

6. Допустим, что скорость, с которой вылетает из ракеты топливо (в системе отсчета «ракета»), равна 500 м/с. Ракета стартует с нулевой начальной скоростью в отсутствие внешних сил. Вычислите величину скорости ракеты в момент, когда масса ракеты уменьшится приблизительно в 2,7 раза по сравнению со стартовой.

Решение

Воспользуемся уравнением Мещерского:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \mu\vec{u} ,$$

где m - масса ракеты, $\vec{\upsilon}$ - ее скорость, $\vec{F}$ - внешняя сила, $\mu = -(dm/dt)$ - скорость изменения массы ракеты за счет выброса топлива со скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты. По условию $\vec{F} = 0$. Если ось X направлена вдоль движения ракеты, то $\upsilon_x = \upsilon$, $u_x = -u$ и уравнение Мещерского принимает вид

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -u\frac{dm}{dt} ,$$

или

$$\frac{d\upsilon}{u} = -\frac{dm}{m}.$$

После интегрирования получим уравнение Циолковского

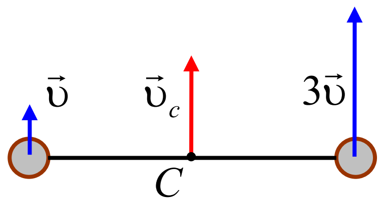
$$\frac{\upsilon}{u} = -\ln\frac{m}{m_0},$$

где m_0 - начальная масса ракеты. По условию $m_0 / m = 2{,}7 \approx e$. Поэтому $\upsilon = u \ln 2{,}7 \approx u$=500 м/с.

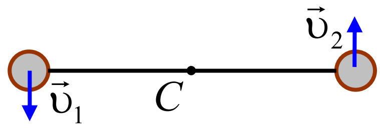
7. Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, сонаправлены и равны соответственно υ и 3υ. Найдите величину F силы натяжения нити.

Решение.

лабораторная система отсчета



C – система отсчета



1) Найдем скорость центра масс системы двух шайб относительно стола (относительно «лабораторной» системы отсчета):

$$m\vec{\upsilon} + m\cdot 3\vec{\upsilon} = (m+m)\vec{\upsilon}_c \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}_c = 2\vec{\upsilon}.$$

2) Перейдем в С-систему отсчета, которая движется поступательно со скоростью $\vec{\upsilon}_c$ относительно лабораторной системы отсчета. В этой системе отсчета первая шайба движется со скоростью

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_c = -\vec{\upsilon},$$

вторая шайба со скоростью

$$\vec{\upsilon}_2 = 3\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_c = 2\vec{\upsilon},$$

а центр масс системы шайб, как и следовало ожидать, покоится (см. рис.). Причем, так как система шайб замкнутая, то центр масс будет оставаться в покое все время. Ясно, что каждая шайба в С-системе отсчета будет двигаться по окружности радиуса $R = l/2$. Силу натяжения нити найдем, воспользовавшись вторым законом Ньютона:

$$F = m\frac{\upsilon_1^2}{R} = \frac{2m\upsilon^2}{l}.$$

Если массы шайб не одинаковые, то центр масс смещен от центра нити к более массивной шайбе и шайбы в С-системе движутся по окружностям разных радиусов.