Механика

Механическим движением называется изменение положения тела по отношению к другим телам. Как видно из определения, механическое движение относительно.

Для описания движения необходимо определить систему отсчета, которая включает в себя тело отсчета, жестко связанную с ним систему координат и набор синхронизированных между собой часов.

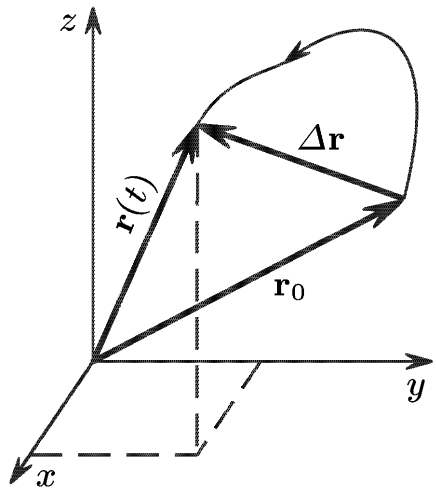
Кинематика занимается описанием движения без выяснения его причин.

1. Кинематика точки

Основные определения. Скорость и ускорение.

Материальной точкой называется макроскопическое тело, размерами которого при описании его движения можно пренебречь.

Положение точки в момент времени t задается радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным к этой точке из начала координат (рис.). В процессе движения конец радиуса-вектора описывает пространственную кривую — траекторию.



В прямоугольной декартовой системе координат положение радиуса-вектора задается тремя его проекциями на оси — **координатами** x, y, z. Движение точки полностью определяется заданием закона движения — одной векторной функции $\vec{r}(t)$ или трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Для компактной записи радиуса-вектора (или любого вектора) через его проекции используют единичные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Путь — длина участка траектории, пройденного точкой за рассматриваемый интервал времени. Путь — величина скалярная, неотрицательная и не убывающая со временем.

Перемещением точки называется вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, соединяющий начальное положение точки с конечным.

Скорость точки равна производной от радиуса-вектора по времени:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{i}\upsilon_x + \vec{j}\upsilon_y + \vec{k}\upsilon_z,$$

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt},\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt},\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}.$$

Скорость направлена по касательной к траектории. Средняя скорость за конечное время Δt определяется как отношение перемещения к интервалу времени:

$$\vec{\upsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Средняя путевая скорость равна отношению пройденного пути к интервалу времени.)

Ускорение точки равно первой производной от скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

Среднее ускорение за время Δt определяется как

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Движение называют равноускоренным, если $\vec{a} = const$.

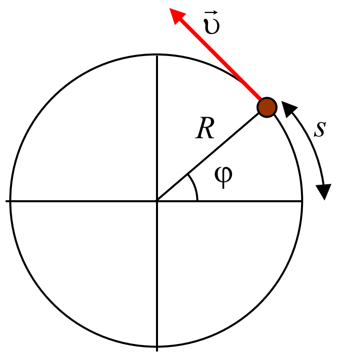
Движение по окружности

Движение по окружности можно описывать с помощью угловых переменных: угла поворота φ, угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

и углового ускорения

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}.$$



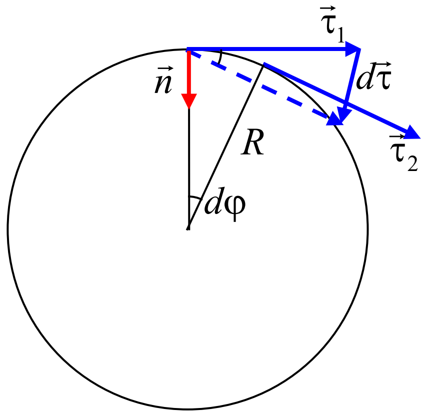
Если угол измерять в радианах, то длина дуги равна $s = \varphi R$. Отсюда следует, что

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = \omega R,$$

Чтобы найти ускорение точки представим вектор скорости в виде

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau},$$

где $\vec{\tau}$ — единичный вектор, направленный вдоль вектора скорости. По определению вектора ускорения



$$\vec{a} = \frac{d(\upsilon\vec{\tau})}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Из рисунка видно, что

$$|\, d\vec{\tau}\,| = |\,\vec{\tau}_1\,|\, d\varphi = d\varphi,$$

причем вектор $d\vec{\tau}$ направлен так же как $\vec{n}$ - единичный вектор, перпендикулярный к скорости и направленный вдоль радиуса. Поэтому

$$d\vec{\tau} = \vec{n}d\varphi$$

и

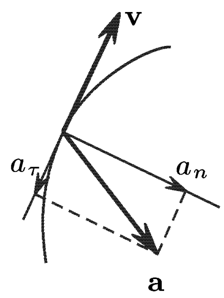
$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{n}\frac{d\varphi}{dt} = \vec{n}\omega = \vec{n}\frac{\upsilon}{R},$$

Следовательно

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}.$$

Составляющая ускорения в направлении скорости (первое слагаемое) называется тангенциальным ускорением и обозначается $\vec{a}_\tau$. Проекция a_τ определяет быстроту изменения модуля скорости и равна производной от модуля скорости:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}.$$



Другую компоненту ускорения, перпендикулярную скорости, называют нормальным ускорением (рис.) и обозначают a_n; она характеризует быстроту изменения направления вектора скорости и равна

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},$$

где R — радиус окружности.

Полученные для ускорения формулы справедливы не только при движении по окружности, но и для произвольной траектории, но под R следует понимать не радиус окружности, а радиус кривизны траектории в данной точке, который определяется соотношением $ds = Rd\varphi$.

При движении по окружности:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \beta R,$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R.$$

В случае равномерного движения по окружности нормальное ускорение называют также центростремительным.

<u>Относительность движения</u>

Сложение скоростей. Если движение точки рассматривается из двух систем отсчета K и K', оси которых остаются все время параллельными друг другу, то между скоростями точки $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}'$ относительно этих систем отсчета в каждый момент времени выполняется соотношение

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}, \qquad (1)$$

где $\vec{V}$ — скорость системы K' относительно системы K. Такое же соотношение выполняется и для ускорений: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$.

2. Кинематика твердого тела

<u>Основные определения</u>

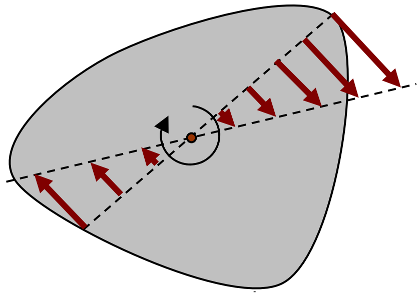
В механике <u>твердым телом</u> называют идеализированное тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется (т.е. отсутствуют деформации).

Различают пять видов движения твердого тела: 1) поступательное, 2) вращение вокруг неподвижной оси, 3) плоское движение, 4) движение вокруг неподвижной точки, 5) свободное движение.

Поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси являются основными видами движения, остальные виды движения к ним сводятся

<u>При поступательном движении</u> отрезок, соединяющий любые две точки тела, перемещается параллельно самому себе. Поскольку все точки тела движутся одинаково, достаточно описать движение одной точки.

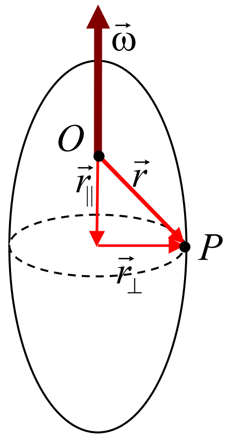
При вращательном движении все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на прямой, называемой осью вращения.



При этом скорости всех точек перпендикулярны оси вращения. Угловые скорости всех точек в каждый момент времени одинаковы, поэтому скорость точки, удаленной от оси вращения на расстояние $r_\perp$, определяется формулой

$$\upsilon = \omega r_\perp .$$

Распределение скоростей в некотором поперечном сечении тела показано на рисунке. Вектор скорости в каждой точке тела направлен по касательной к окружности, проведенной через эту точку в плоскости перпендикулярной оси вращения.



Можно избежать словесных уточнений и записать формулу, определяющую и величину, и направление вектора скорости в любой заданной точке *P* тела:

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}\vec{r}] \qquad (2)$$

Здесь вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ по определению направлен вдоль оси вращения по правилу буравчика, а его модуль равен $|\vec{\omega}| = \omega = d\varphi / dt$, вектор $\vec{r}$ проведен от произвольной точки *O* на оси вращения до заданной точки *P*. Заметим, что $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$ и

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}\vec{r}] = [\vec{\omega}(\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel] = [\vec{\omega}\vec{r}_\perp].$$

В случае неподвижной оси вращения вектор углового ускорения $\vec{\beta} = d\vec{\omega} / dt$ также направлен вдоль оси.

Плоское движение твердого тела определяют как движение, при котором скорости всех точек тела параллельны некоторой плоскости. Если с любой точкой тела (или его мысленного продолжения) связать поступательно движущуюся систему координат, то относительное движение будет чистым вращением вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости движения.

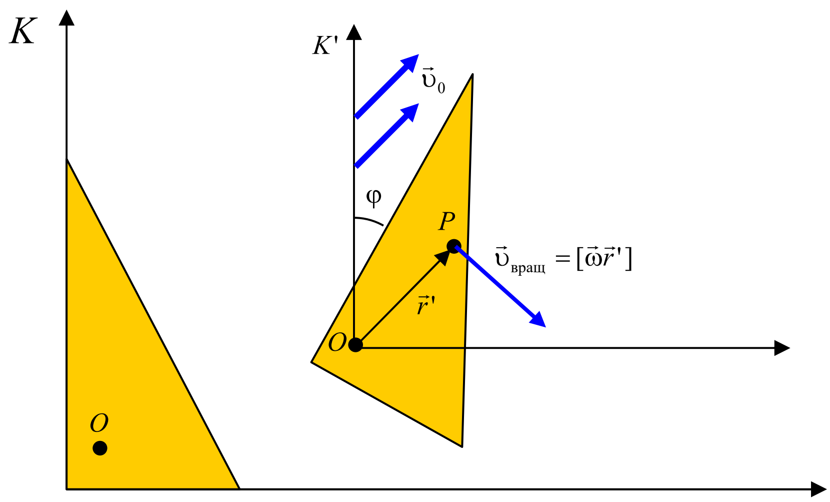
При плоском движении мы имеем дело с движением плоской фигуры в неподвижной плоскости. Положение фигуры можно определить, задав радиус вектор $\vec{r}_0$ произвольной точки *O* фигуры и угол φ между некоторой прямой, жестко связанной с фигурой и некоторым фиксированным направлением в рассматриваемой системе отсчета. Тогда плоское движение твердого тела будет описываться выражениями:

$$\vec{r}_0(t),\ \varphi(t).$$

Ясно, что угол поворота $\varphi(t)$ не зависит от выбора точки *O*. Потому от выбора этой точки не зависит и угловая скорость $\omega = d\varphi / dt$.

Скорость произвольной точки *P* плоской фигуры (тела) можно найти по закону сложения скоростей:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega}\vec{r}']$$



Пояснения к рисунку:

1. K - неподвижная СО. В этой системе отсчета совершает плоское движение твердое тело- желтый треугольник.
2. K' - система отсчета движется поступательно вместе с фиксированной точкой тела O и в некоторый момент времени скорость этой системы отсчета равна $\vec{\upsilon}_0$ - это скорость точки O в этот момент времени относительно неподвижной системы отсчета.
3. В K'-системе отсчета тело вращается вокруг неподвижной оси O. Угол поворота не зависит от выбора точки O.
4. Скорость произвольной точки P относительно K-СО определяется формулой:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}_{\text{вращ}} = \vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega}\vec{r}\,']$$

Мгновенная ось вращения

Плоское движение можно свести к чисто вращательному. Для этого нужно выбрать точку O так, чтобы скорость этой точки $\vec{\upsilon}_0 = 0$ в данный момент времени. Это всегда можно сделать.

Пример 1. Качение колеса без проскальзывания со скоростью υ удобно представить как сумму поступательного движения со скоростью υ и вращательного движения с угловой скоростью ω (рис. 3). Скорость любой точки относительно земли можно найти по закону сложения скоростей (1). Скорость нижней точки колеса O' должна быть равна нулю, откуда следует связь между υ и ω: $\upsilon = \omega r$. Ускорения всех точек направлены к центру колеса.

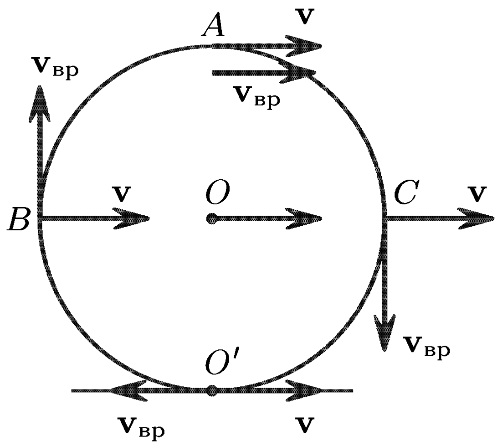


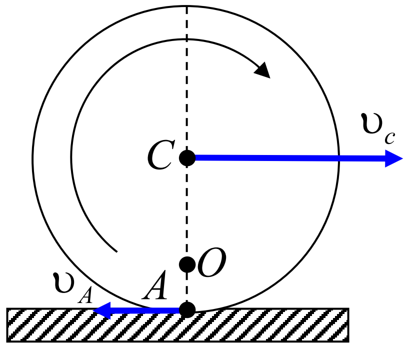
Рис. 3

Если какая-то точка тела (или его мысленного продолжения) в данный момент неподвижна, то существует проходящая через нее прямая неподвижных точек, которую называют мгновенной осью вращения. Распределение скоростей в этот момент описывается формулой (2). Мгновенная ось и $\vec{\omega}$ могут менять свое положение как в пространстве, так и относительно тела. В частности, в примере 1 можно получить скорости всех точек колеса как результат чистого вращения относительно мгновенной оси, проходящей через точку касания O'. Угловое ускорение $\vec{\beta}$ может быть непараллельно мгновенной оси.

Пример 2. При резком ускорении колесо автомобиля проскальзывает относительно полотна дороги. Скорость точки *A* (см. рис.) относительно земли равна $\upsilon_A = 4$ м/с, а скорость точки *C* (центра колеса) равна $\upsilon_C = 20$ м/с. На какой высоте над землей находится мгновенная ось вращения? Радиус колеса $R = 0{,}5$ м.

Решение.

Так как скорости точек *A* и *C* направлены противоположно и горизонтально, то мгновенная ось вращения перпендикулярная плоскости чертежа, пересекает его плоскость в точке *O*, принадлежащей отрезку *AC*.



Обозначим $OC = r_C$, $OA = h$. Тогда

$\upsilon_C = \omega r_C = \omega(R - h)$,

$\upsilon_A = \omega h$,

Из этих уравнений получим: $r_A = R\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon_A + \upsilon_C}$

Движение твердого тела в данный момент времени представляет собой чистой вращение вокруг некоторой оси, которую называют мгновенной осью вращения. Положение мгновенной оси, вообще говоря меняется со временем. Например, в случае катящегося по плоскости цилиндра мгновенная ось в каждый момент совпадает с линией касания цилиндра и плоскости.