

# Специальная теория относительности

## Решения некоторых задач

### 1. Преобразования Лоренца

**9.1.** В лабораторной ИСО происходят события  $A$  и  $B$  в точках, разделенных расстоянием  $\Delta x = 6 \cdot 10^8$  м и промежутком времени  $\Delta t = 1$  с. Вычислите, с какой скоростью  $V$  должен лететь космический корабль из точки  $A$  в точку  $B$ , чтобы в его системе отсчета (в которой корабль покоится) эти события стали одновременными?

**9.2.** В лабораторной ИСО происходят события  $A$  и  $B$  в точках, разделенных расстоянием  $\Delta x = 3 \cdot 10^9$  м и промежутком времени  $\Delta t = 15$  с. Вычислите, с какой скоростью  $V$  должен лететь космический корабль из точки  $A$  в точку  $B$ , чтобы в его системе отсчета (в которой корабль покоится) эти события стали одноместными?

#### Решения

Запишем преобразования Лоренца

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

В задаче 9.1  $\Delta t' = 0$ . Следовательно,  $V = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x} = 1,5 \cdot 10^8$  м/с.

В задаче 9.2 по условия  $\Delta x' = 0$ . Следовательно,  $V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2 \cdot 10^8$  м/с.

### 2. Замедление времени

**9.18.** Собственное время жизни некоторой частицы  $\Delta t_0 = 10$  нс. Найдите длину пути, который пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни составляет  $\Delta t = 20$  нс.

#### Решение

Время жизни частицы в лабораторной СО:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

За это время в лабораторной СО частица пролетит путь

$$l = \Delta t \cdot V.$$

Из этих уравнений найдем

$$l = c \sqrt{\Delta t^2 - \Delta t_0^2} \approx 5,2 \text{ м.}$$

### 3. Сокращение длины

**9.24.** Две частицы движутся друг за другом по одной прямой со скоростями  $V = 0,75 \cdot c$  относительно лабораторной системы отсчета и попадают в неподвижную мишень с интервалом времени, равным  $\Delta t = 50$  нс по лабораторным часам. Найдите собственное расстояние между частицами до попадания в мишень.

### Решение

В лабораторной системе отсчета расстояние между частицами  $\Delta l = V\Delta t$ . Тогда собственное расстояние между частицами

$$\Delta l_0 = \frac{\Delta l}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{V\Delta t}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \approx 17 \text{ м.}$$

#### *4. Релятивистский закон сложения скоростей*

**9.25.** Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями  $0,9c$  каждая относительно лабораторной системы отсчета. Найдите скорость первой частицы относительно второй.

### Решение

Свяжем  $K'$ -систему отсчета с одной из частиц и воспользуемся законом сложения скоростей:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}$$

В нашем случае  $V = 0,9 \cdot c$ ,  $v_x = -0,9 \cdot c$  и

$$v'_x = \frac{-1,8c}{1 + \frac{(0,9c)^2}{c^2}} = -0,9945c.$$

#### *5. Релятивистское уравнение движения материальной точки*

**9.33.** Релятивистская частица массой  $m$  начинает двигаться под действием постоянной силы  $\vec{F}$ . Найдите зависимость скорости частицы от времени и изобразите эту зависимость на графике.

### Решение

Уравнение динамики запишем для проекций векторных величин на ось  $x$ , совпадающей с направлением силы  $\vec{F}$ :

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

При постоянной силе, это уравнение легко интегрируется:

$$p - p(0) = Ft.$$

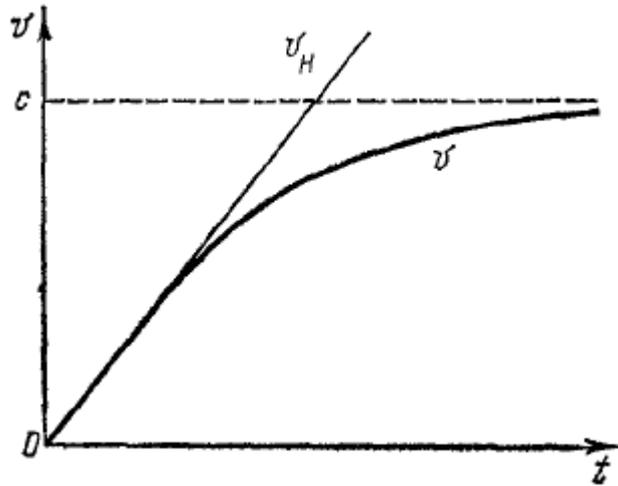
Так как  $v(0) = 0$ , то  $p(0) = 0$  и

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = Ft.$$

Из этого уравнения найдем  $v$ :

$$v = \frac{Ft}{m\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}.$$

При  $Ft/mc \ll 1$  получаем классический результат  $v = (F/m)t = at$ , при  $Ft/mc \gg 1$  получаем  $v \rightarrow c$  (см. рис.)



6. Релятивистские соотношения для импульса

**9.39.** Найдите скорость, при которой кинетическая энергия релятивистской частицы равна ее энергии покоя.

Решение

Запишем выражения для кинетической энергии

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - E_0$$

и энергии покоя

$$E_0 = mc^2.$$

Учитывая, что  $E_k = E_0$ , получим

$$mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2.$$

Отсюда  $v = (\sqrt{3}/2)c$

**9.41.** Импульс частицы равен  $mc$ . Во сколько раз полная энергия частицы больше ее энергии покоя?

Решение

По условию релятивистский импульс равен  $mc$ :

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc.$$

Следовательно,

$$(v/c)^2 = 1 - (v/c)^2 \text{ и } (v/c)^2 = 1/2.$$

Найдем отношение полной энергии к энергии покоя:

$$\delta = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot \frac{1}{mc^2} = \sqrt{2}.$$