Момент импульса, момент силы. Момент инерции. Теорема Штейнера

Момент силы.

5.3. К материальной точке, радиус – вектор которой относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = -2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$. Вычислите момент $\vec{M}$ и плечо l силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Решение.

По определению $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$. Вычисляем:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 12{,}5 \cdot \vec{k}.$$

Плечо силы определяется формулой $M = lF$, где $M = \left|\vec{M}\right| = 12{,}5$, $F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} = 2{,}5$. Следовательно, $l = M / F = 5$ м.

Момент импульса материальной точки.

5.10. Радиус – вектор материальной точки относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Импульс этой материальной точки равен $\vec{p} = 2\vec{i}$. Вычислите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O.

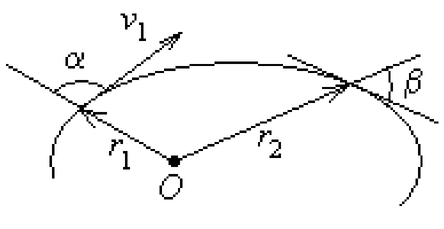
Решение.

По определению $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$. Вычисляем:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \cdot \vec{k}.$$

Сохранение момента импульса.

5.19. Частица движется в центральном поле сил с центром в точке О (см. рис.). На рисунке показан участок траектории. Считая известными v_1, α, r_1, β и r_2, найдите v_2.



Решение.

В центральном поле сил момент импульса относительно центра поля (точка O на рис.) сохраняется, поскольку момент центральных сил относительно точки O равен нулю. Проекция момента мпульса на ось Z, проходящую через точку O перпендикулярно плоскости чертежа «от нас», равна:

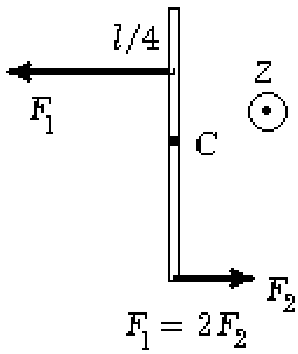
$$L_z = \upsilon_1 r_1 \sin\alpha = \upsilon_2 r_2 \sin\beta.$$

Поэтому

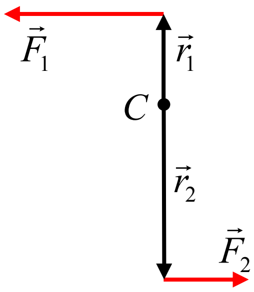
$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{r_1}{r_2} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Момент сил, действующих на твердое тело

6.14. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится однородный стержень длины l и массы m. В некоторый момент времени к стержню прикладывают горизонтальные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как показано на рис. Найдите для этого момента времени величину и направление вектора момента сил, вычисленного относительно точки C.



Решение.



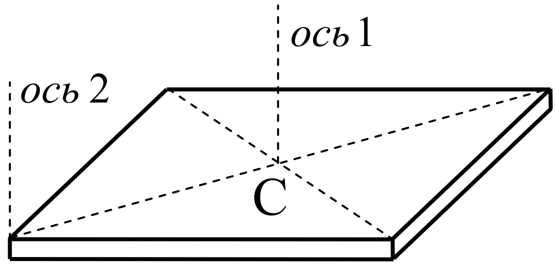
Векторы $\vec{M}_1 = [\vec{r}_1 \vec{F}_1]$ и $\vec{M}_2 = [\vec{r}_2 \vec{F}_2]$ направлены «на нас» перепендикулярно плоскости чертежа. Учитывая, что $r_1 = l/4$, $r_2 = l/2$ и $F_1 = 2F_2$, получим

$$M = \frac{l}{4}F_1 + \frac{l}{2}F_2 = F_2 l\,.$$

Момент инерции твердого тела.
Теорема Штейнера

6.36 Найдите момент инерции тонкой однородной прямоугольной пластинки относительно оси, перпендикулярной ее плоскости и проходящей через одну из ее вершин, если известно, что момент инерции пластинки относительно параллельной оси, проходящей через ее центр, находится по формуле $\frac{m\cdot\left(a^2+b^2\right)}{12}$. Масса пластинки m, длины ее сторон a и b.

Решение.



Момент инерции относительно оси 1, проходящей через центр масс, равен

$$I_C = \frac{m(a^2+b^2)}{12}\,.$$

По теореме Штейнера момент инерции относительно оси 2, параллельной оси 1, равен $I_2 = I_C + ml^2$,

где $l = \sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}$ - расстояние между осями. После преобразований получим

$$I_2 = \frac{m}{3}\cdot\left(a^2+b^2\right).$$