Электромагнитная индукция

(примеры решения задач)

<u>Проводник движется в постоянном магнитном поле</u>

<u>Пример 1.</u>

В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ расположен П-образный проводник, плоскость которого перпендикулярна вектору магнитной индукции. По проводнику со скоростью V перемещают поступательно, как показано на рис.1, жесткую проводящую перемычку. В каких случаях ЭДС индукции в замкнутом контуре равна $|\varepsilon_i| = BVl$?

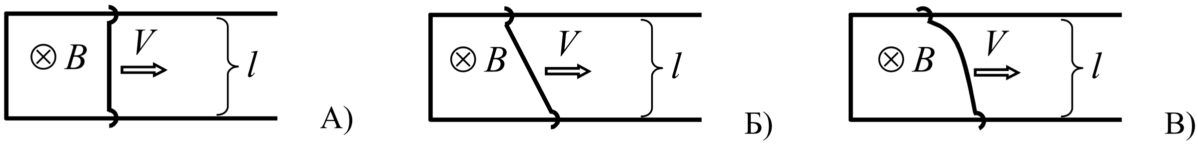


Рис.1

<u>Решение.</u>

I способ. Выбрав нормаль к плоскости контура в направлении вектора $\vec{B}$, найдем изменение магнитного потока, которое для всех случаев равно

$$d\Phi = (\vec{B}, d\vec{S}) = (\vec{B}, \vec{n}dS) = BdS .$$

При движении проводника площадь рамки увеличивается, магнитный поток сквозь рамку возрастает, а значит согласно закону Фарадея, в рамке должна при этом действовать ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} .$$

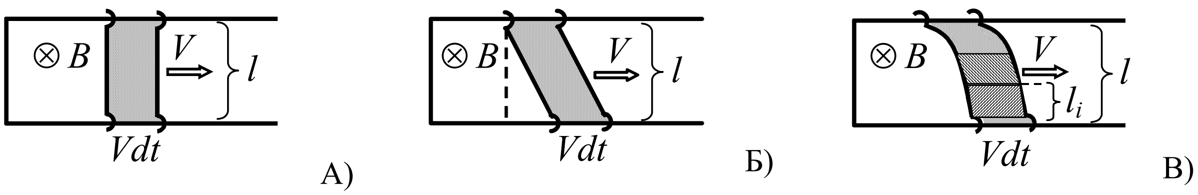


Рис.2

Поскольку проводник движется поступательно, за время dt он переместится на величину Vdt во всех трех случаях (рис.2). Изменение площади контура, которое равно площади заметаемой перемычкой, в случае А) равно площади выделенного прямоугольника на рис.2А)

$$dS = lVdt .$$

Это же изменение площади будет и в случае Б) рис.2 Б), так как площадь параллелограмма равна произведению его основания Vdt на его высоту l.

В случае В) перемычка имеет произвольную форму. Разобьем перемычку на малые прямолинейные элементы. Площадь, заметаемая каждым элементом при движении перемычки, определяется аналогично случаю Б)

$$dS_i = l_i Vdt .$$

Полная площадь, заметаемая всеми элементами, равна сумме площадей, заметаемых каждым элементом перемычки

$$dS = \sum_i dS_i = (\sum_i l_i)Vdt = lVdt\,.$$

Полученный результат совпадает с результатами для случаев А) и Б). Таким образом, для всех трех случаев ЭДС индукции в замкнутом контуре будет равна

$$\varepsilon_i = -BVl\,.$$

Знак минус в полученной формуле означает, что направление ЭДС индукции противоположно положительному направлению обхода контура.

II способ. В каждой точке проводника, движущегося в поле магнитной индукции $\vec{B}$, действует сила Лоренца $\vec{F}_Л = q\left[\vec{V},\vec{B}\right]$, которая порождает поле сторонних (то есть не электростатических, а магнитных) сил напряженностью

$$\vec{E}^{ст} = \frac{\vec{F}_Л}{q} = \left[\vec{V},\vec{B}\right].$$

Электродвижущая сила этого поля в движущейся перемычке контура, по определению, равна (см. рис.3)

$$\varepsilon_i = \int_{1\to 2}(\vec{E}^{ст}d\vec{l}\,) = \int_{1\to 2}(\left[\vec{V},\vec{B}\right]d\vec{l}\,) = (\left[\vec{V},\vec{B}\right]\vec{l}_{12})\,.$$

Интегрирование поводится по всем элементам контура от начала 1 до конца 2 и

$$\vec{l}_{12} = \int_{1\to 2} d\vec{l}\,.$$

Вводя систему координат, как показано на рисунке, получим

$$\left[\vec{V},\vec{B}\right] = \left[V\vec{e}_y, B\vec{e}_z\right] = VB\vec{e}_x\,,$$

поэтому

$$\varepsilon_i = VB(\vec{e}_x,\vec{l}_{12}) = VBl_{12,x}\,.$$

То есть ЭДС индукции не зависит от конфигурации проводника, а определяется проекцией замыкающего его концы вектора на направление оси X (см. рис.3).

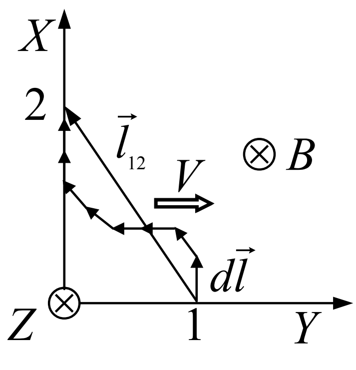


Рис.3

Для всех трех случаев ЭДС индукции в замкнутом контуре будет равна

$$\mathcal{E}_i = BVl\,,$$

что совпадает с результатом, полученным ранее при решении данной задачи.

Пример 2.

На горизонтальном столе в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B лежат, пересекаясь, две металлические линейки. По линейкам перемещают тонкий стержень с постоянной скоростью V, перпендикулярной стержню (рис.4). Длина стержня L, сопротивление между концами стержня R, сопротивление линеек и контактных областей пренебрежимо мало. Найдите протекающий по стержню ток.

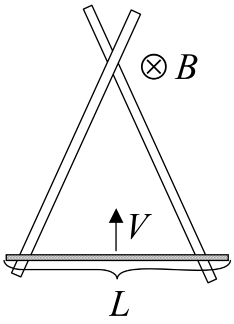


Рис.4

Решение.

Введем нормаль к поверхности, натянутой на контур, по направлению поля $\vec{B}$ (см. рис.5). Тогда магнитный поток сквозь эту поверхность будет равен

$$\Phi = B \cdot S(t)\,.$$

За время dt стержень переместится на величину Vdt, изменение площади при этом составит

$$dS = -V \cdot l(t)dt\,.$$

Следовательно, по закону электромагнитной индукции, в контуре будет действовать ЭДС, величина которой равна:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdS}{dt} = BV\,l(t)\,.$$

А направление возникающего индукционного тока соответствует направлению положительного обхода контура, показанного на рис.5.

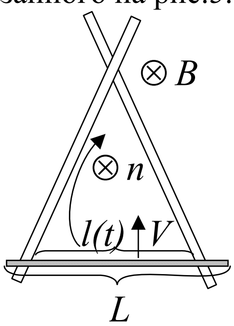


Рис.5

Величина индукционного тока равна

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R(t)} = \frac{BLV}{R}\,,$$

где $R(t) = \dfrac{R}{L}l(t)$.

Пример 3.

В постоянном однородном магнитном поле с индукцией B закреплен прямоугольный проводящий контур, плоскость которого перпендикулярна вектору магнитной индукции. По контуру поступательно перемещают со скоростью V проводящую перемычку длины l (см. рис.6). Сопротивления R_1 и R_2 известны и значительно превышают сопротивление проводов и перемычки. Определите токи I_1 и I_2 в контуре.

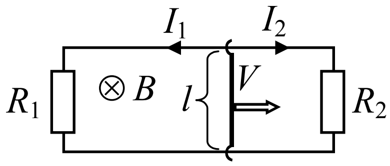


Рис.6

Решение.

В рассматриваемой системе можно выделить два контура: контур 1 с током I_1 и контур 2 с током I_2. Выберем единую нормаль к плоскостям контуров в направлении вектора $\vec{B}$. При движении перемычки вправо за время dt перемычка переместится на величину Vdt. И насколько магнитный поток через контур 1 увеличится, настолько поток через контур 2 уменьшится

$$|d\Phi| = BlVdt .$$

Следовательно, по закону электромагнитной индукции в контурах 1 и 2, будет действовать ЭДС, величина которой равна:

$$\varepsilon_i = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = BlV ,$$

а направление соответствует направлению положительного обхода контура 2 и противоположно направлению положительного обхода контура 1. На рис.7 показана эквивалентная схема, в которой ЭДС индукции представлена как ЭДС источника с нулевым внутренним сопротивлением.

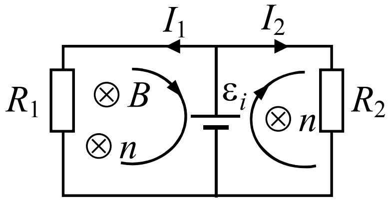


Рис.7

Тогда по закону Ома токи I_1 и I_2 в контурах 1и 2 равны

$$I_1 = \frac{\varepsilon_i}{R_1} = \frac{BlV}{R_1} \text{ и } I_2 = \frac{\varepsilon_i}{R_2} = \frac{BlV}{R_2} .$$

Пример 4.

Длинный прямой провод с током I и П-образный проводник с подвижной перемычкой расположены в одной плоскости (см. рис.8). Перемычку, длина которой l, перемещают вправо с постоянной скоростью V. Найдите ЭДС индукции в контуре как функцию расстояния r.

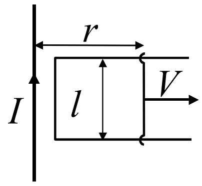


Рис.8

Решение.

Введем горизонтальную ось R, направление которой совпадает с направлением движения перемычки (рис.9).

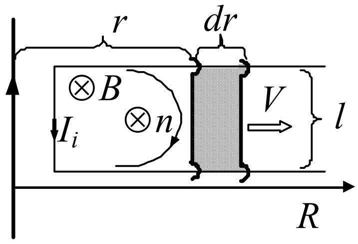


Рис.9

Перемычка движется в неоднородном магнитном поле, величина которого зависит от расстояния r до проводника:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Выберем направление нормали к плоскости контура в направлении вектора $\vec{B}$ (см. рис.9). Тогда магнитный поток $d\Phi$ через заметаемую поверхность при смещении перемычки на dr равен

$$d\Phi = (\vec{B}, d\vec{S}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr,$$

где ldr - площадь заметаемой поверхности. По закону электромагнитной индукции, в контуре будет действовать ЭДС, величина которой равна:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} l \frac{dr}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} lV,$$

где $V = dr/dt$ - скорость перемещения перемычки. Перемычка движется вправо, и поток через поверхность контура увеличивается. Поэтому направление ЭДС индукции, а значит и индукционного тока противоположно положительному направлению обхода контура. Причиной ЭДС в рассматриваемом случае является сила Лоренца, которая действует на движущиеся вместе с перемычкой носители заряда.

Пример 5.

На расстояниях a и b от длинного прямого провода, по которому течет постоянный ток I_0, расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце резистором сопротивления R (рис.10). По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью V стержень-перемычку. Пренебрегая сопротивлением провода и стержня, а также магнитным полем индукционного тока, найдите:

А) индукционный ток в стержне;

Б) силу, необходимую для поддержания постоянной скорости.

Решение.

Проводник-перемычка движется в неоднородном магнитном поле, создаваемом длинным прямым проводом

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r},$$

где r расстояния от проводника с током. Выберем направление нормали к плоскости контура в направлении вектора $\vec{B}$, которое показано на рис.10 с указанием направления положительного обхода контура.

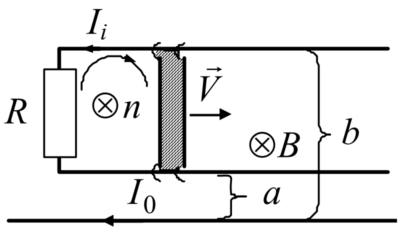


Рис.10

При движении перемычки вправо за время dt перемычка переместится на величину Vdt. Тогда приращение магнитного потока через заметаемую поверхность равно

$$d\Phi = (\vec{B}, d\vec{S}) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} Vdt \int_a^b \frac{dr}{r} = (\frac{\mu_0 I_0 V}{2\pi} \ln\frac{b}{a})dt.$$

По закону электромагнитной индукции, в контуре будет действовать ЭДС, обуславливающая ток через резистор R:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 V}{2\pi R} \ln\frac{b}{a}.$$

Знак минус показывает, что направление индукционного тока противоположно направлению положительного обхода контура (рис.10).

На перемычку, по которой течет индукционный ток, со стороны магнитного поля будет действовать сила Ампера F_A, которая согласно правилу Ленца тормозит ее движение. Движение перемычки будет равномерным, если к ней будет приложена внешняя сила $\vec{F}$, удовлетворяющая условию

$$\vec{F}_A + \vec{F} = 0.$$

Сила Ампера, действующая на элемент индукционного тока в магнитном поле, определяется выражением

$$d\vec{F}_A = I_i \left[d\vec{r}, \vec{B}\right].$$

Так как $d\vec{r} \perp \vec{B}$, то силы Ампера, действующие на каждый элемент перемычки, сонаправлены, и результирующая сила, действующая на перемычку, равна

$$F = F_A = \int_a^b I_i B dr = \int_a^b I_i \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} dr = \left(\frac{\mu_0 I_0 V}{2\pi R} \ln\frac{b}{a}\right) \int_a^b \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{dr}{r} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\right)^2 \frac{V}{R} \ln^2\frac{b}{a}.$$

Пример 6.

Одна половина проволочной прямоугольной рамки площадью S развернута относительно другой на угол α (рис.11). Найдите амплитуду ЭДС в такой рамке при ее вращении с угловой скоростью ω вокруг оси СО в однородном магнитном поле $\vec{B}$, направленном перпендикулярно оси вращения. Рассмотрите также специальные случаи:

а) $\alpha = 0^0$, б) $\alpha = 90^0$, в) $\alpha = 180^0$.

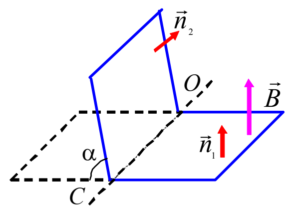


Рис.11

Решение.

Поток магнитной индукции через рамку равен сумме потоков, пронизывающих каждую половину рамки, направления нормалей к которым задаются векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ (см. рис.12).

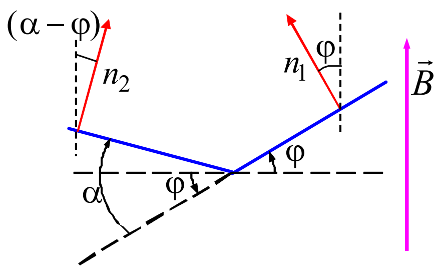


Рис.12

Если учесть, что в начальный момент времени нормаль $\vec{n}_1$ совпадает по направлению с вектором $\vec{B}$, а нормаль $\vec{n}_2$ развернута на угол α по отношению к нормали $\vec{n}_1$, то полный магнитный поток через рамку в любой момент времени t будет равен

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = B\frac{S}{2}\cos\varphi + B\frac{S}{2}\cos(\alpha - \varphi),$$

где $\varphi = \omega t$ - угол поворота рамки (рис.12).

Таким образом, полный поток как функция времени опишется выражением

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = B\frac{S}{2}\cos\omega t + B\frac{S}{2}\cos(\omega t - \alpha) = BS\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\omega t - \frac{\alpha}{2}\right).$$

По закону электромагнитной индукции для величины ЭДС получим:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\omega t - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Амплитудное значение ЭДС индукции ε_m достигается при $\left|\sin(\omega t - \alpha/2)\right| = 1$ и равно

$$\varepsilon_m = BS\omega\cos(\alpha/2).$$

Для заданных в задаче специальных случаев, получим:

а) $\alpha = 0^0$ $\quad \varepsilon_m = BS\omega$,

б) $\alpha = 90^0$ $\quad \varepsilon_m = \sqrt{2}BS\omega/2$, в) $\alpha = 180^0$ $\varepsilon_m = 0$.

<u>Проводящий контур в переменном магнитном поле</u>

<u>Пример 7.</u>

Магнитный поток через замкнутый проводящий контур сопротивлением $R = 10$ Ом изменяется со временем t по закону $\Phi = \beta t^2$, где $\beta = 10$ Вб/с^2. Определите силу тока I в контуре в момент времени $t = 1$ мс.

<u>Решение.</u>

Мгновенное значение ЭДС индукции, согласно закону Фарадея, определяется как

$$\varepsilon_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -2\beta t\,.$$

Тогда ток в контуре по закону Ома равен

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{2\beta t}{R} = -2 \text{ мА}.$$

Знак минус в полученном выражении свидетельствует о том, что направление индукционного тока противоположно направлению положительного обхода контура, которое в свою очередь согласовано с направлением вектора нормали к поверхности, натянутой на контур. Причиной индукции является вихревое электрическое поле, порождаемое изменяющимся магнитным потоком, если контур неподвижен, и сила Лоренца, если он перемещается в неоднородном постоянном магнитном поле.

<u>Пример 8.</u>

На длинный соленоид, имеющий диаметр сечения $d = 5$ см и содержащий $n = 20$ витков на 1 см длины, плотно надет круговой виток из медного провода сечением $s = 1$ мм^2 (удельное сопротивление меди $\rho = 16 \cdot 10^{-9}\,\text{Ом} \cdot \text{м}$). Найдите ток в витке, если ток в обмотке соленоида увеличивают с постоянной скоростью $\dot{I} = 100$ А/с. Магнитным полем индукционного тока пренебречь.

<u>Решение.</u>

Магнитное поле внутри длинного соленоида однородно и равно

$$B = \mu_0 In\,,$$

где n число витков на единицу длины, а I – мгновенное значение тока. Поэтому, при выборе направления нормали к поверхности витка вдоль направления поля, магнитный поток через эту поверхность равен

$$\Phi = BS = \mu_0 In \cdot S\,,$$

где $S = \pi d^2/4$ - площадь поверхности витка.

При увеличении тока в обмотке соленоида магнитный поток через виток возрастает, и возникающий индукционный ток определяется выражением

$$I_i R = \varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \dot{I} n \frac{\pi d^2}{4}\,,$$

где $R = \pi d\rho / s$, а знак минус определяет направление индукционного тока в направлении противоположном направлению положительного обхода витка.

Тогда, величина тока через виток в момент времени t равна

$$I_i = -\frac{\mu_0 n s d \dot{I}}{4\rho} \cong -2\,\text{мА}.$$

<u>Пример 9.</u>

Плоский контур (рис.13), имеющий вид двух квадратов со сторонами $a = 20$ см и $b = 10$ см, находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном его плоскости. Индукцию поля меняют по закону $B = B_0 \sin\omega t$, где $B_0 = 10$ мТл и $\omega = 100$ с$^{-1}$. Найдите амплитуду индукционного тока в контуре, если сопротивление единицы его длины $R_1 = 50$ МОм/м. Магнитным полем этого тока пренебречь.

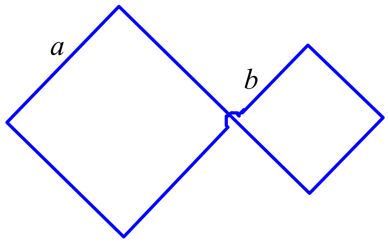


Рис.13

<u>Решение.</u>

Индукционный ток в рамке равен

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

На рис.14 показано направление магнитного поля, а также нормалей к поверхности каждого из квадратов, составляющих контур, согласованные единым направлением положительного обхода. С учетом этого суммарный магнитный поток через контур равен

$$\Phi = Ba^2 - Bb^2 = B_0(a^2 - b^2)\sin\omega t.$$

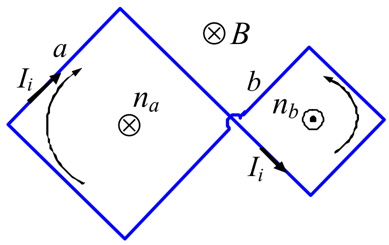


Рис.14

Откуда

$$I_i = \frac{B_0\omega(a^2 - b^2)}{R}\cos\omega t.$$

Учитывая, что сопротивление контура равно $R = 4(a+b)\cdot R_1$, найдем амплитуду индукционного тока

$$I_{i\,m} = \frac{\omega B_0 (a-b)}{4R_1} = 0{,}5\,\text{нА}$$

Заряд и изменение магнитного потока

Пример 10.

Квадрат, изготовленный из проволоки сопротивлением R = 1 Ом, помещен в однородное магнитное поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого перпендикулярен плоскости квадрата. Длина стороны квадрата a = 1 см. Величина индукции магнитного поля сначала равна B=0,1 Тл а затем ее уменьшают до нуля. Найдите величину q заряда, который в результате переместится через поперечное сечение проволоки.

Решение.

Количество электричества, протекающего через любое поперечное сечение контура с сопротивлением R при изменении магнитного потока сквозь контур на величину $\Delta\Phi$, равно

$$q = \int I_i dt = \int \frac{\mathcal{E}_i}{R} dt = -\frac{1}{R}\int \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{\Delta\Phi}{R}.$$

Отметим, что величина q не зависит от характера временной зависимости изменения магнитного потока, а определяется только его начальным и конечным значениями. Так как индукция магнитного поля меняется от B до нуля, приращение магнитного потока, пронизывающего контур, равно

$$\Delta\Phi = 0 - Ba^2 = -Ba^2.$$

А величина заряда, который протекает по проволоке, определится выражением

$$q = \frac{Ba^2}{R} = 10^{-5}\ \text{Кл}.$$

Вихревое электрическое поле

Пример 11.

В длинном прямом соленоиде с радиусом сечения R = 5 см и числом витков на единицу длины $n = 500$ см$^{-1}$ ток изменяют по закону $I = \alpha t$, где α =10 А/с. Найдите модуль напряженности индукционного электрического поля E на расстоянии r от оси соленоида. Решите задачу для: а) r = 3 см, б) r = 8 см. Изобразите примерный график зависимости $E(r)$.

Решение.

Циркуляция электрического поля, возникающего при изменении тока в обмотке, определяется законом электромагнитной индукции

$$\oint(\vec{E}, d\vec{l}\,) = -\int \frac{\partial\vec{B}}{dt} d\vec{S}.$$

Магнитное поле внутри длинного прямого соленоида однородно и равно

$$B = \mu_0 I n = \mu_0 n \alpha t,$$

а снаружи отсутствует $B = 0$.

Учитывая осевую симметрию магнитного поля соленоида, линиями электрического поля являются концентрические окружности с центрами на оси соленоида. Выберем в качестве контура Г линию поля $\vec{E}$ с направлением обхода, соответствующего правилу правого винта нормали $\vec{n}$, совпадающей с направлением поля $\vec{B}$ в соленоиде (рис.15А). Тогда циркуляция электрического поля по этому контуру определяется как

$$\oint(\vec{E},d\vec{l}\,) = 2\pi r \cdot E(r)\,.$$

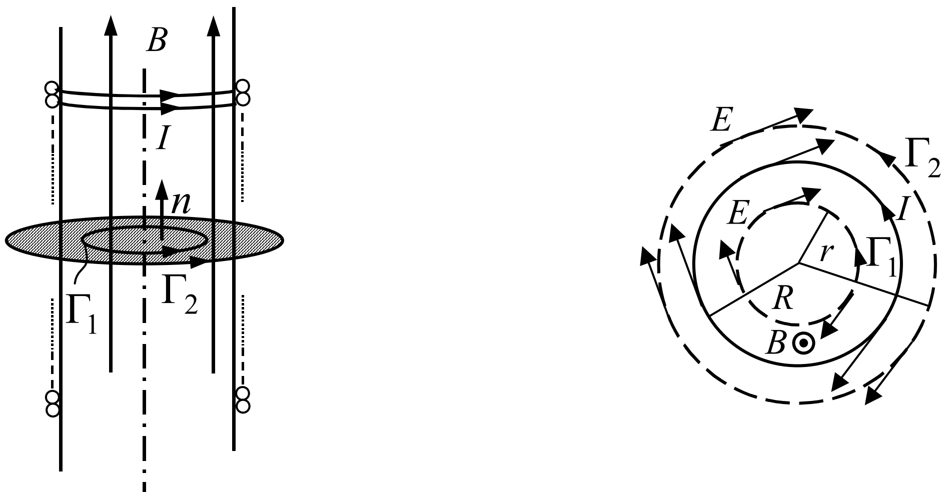
а) Если $r < R$, то $\Phi_{\Gamma_1} = B \cdot \pi r^2$ и по закону электромагнитной индукции

$$2\pi r \cdot E = -\mu_0 n\alpha \cdot \pi r^2\,.$$

Отсюда следует, что

$$E(r) = -\mu_0 n \frac{\alpha r}{2} = -9{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{В/м.}$$

Знак минус в полученном выражении показывает, что направление линий поля $\vec{E}$ противоположно направлению положительного обхода контура Γ. В этой области поле является вихревым и соленоидальным (см.рис.15А - вид сбоку и 15Б - вид сверху).



А Б

Рис.15

б) Теперь рассмотрим контур Γ_2 в виде окружности радиусом $r > R$. В этом случае $\Phi_{\Gamma_2} = B \cdot \pi R^2$ и, следовательно

$$E \cdot 2\pi r = -\mu_0 n\alpha \cdot \pi R^2\,,$$

откуда величина напряженности электрического поля вне соленоида

$$E(r) = -\mu_0 n \frac{\alpha R^2}{2r} = -9{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{В/м.}$$

В этой области магнитного поля нет и $\partial\vec{B}/\partial t = 0$. Следовательно, в соответствии с законом электромагнитной индукции в дифференциальной форме $\left[\nabla,\vec{E}\right] = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, поле вне соленоида является безвихревым

$$\left[\nabla,\vec{E}\right] = 0\,,$$

но не является потенциальным, так как не для любого замкнутого контура циркуляция напряженности поля равна нулю. То есть поле в этой области является безвихревым и соленоидальным (см.рис.15 А, Б).

Примерный график зависимости $E(r)$ представлен на рис.16.

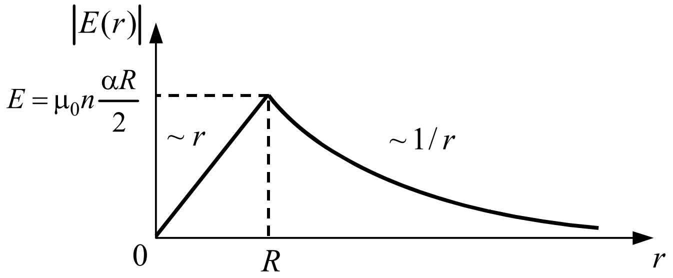


Рис.16