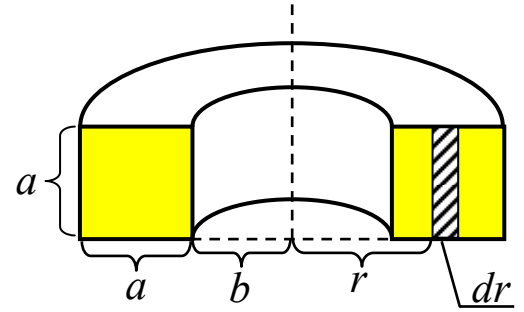


Примеры решения задач

Пример 1.

Найдите индуктивность L тороидальной катушки из N витков, внутренний радиус которой равен b , а поперечное сечение имеет форму квадрата со стороной a . Пространство внутри катушки заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ .



Решение.

Индуктивность катушки определяется выражением

$$L = \Phi / I ,$$

где I – ток в катушке, Φ – магнитный поток через ее витки. Применяя теорему о циркуляции вектора \vec{H} для контура в виде окружности радиуса r , перпендикулярной оси тороида с центром, лежащей на этой оси (выбранный контур совпадает с одной из линий поля \vec{B}), найдем зависимость индукции B от расстояния r до оси тороида:

$$H(r)2\pi r = NI ,$$

$$B(r) = \mu\mu_0 H(r) ,$$

$$B(r) = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi r} .$$

Поток вектора индукции через элементарную площадку, показанную на рисунке штриховкой, равен

$$d\Phi_1 = B(r)dS = B(r)adr .$$

Поток через один виток катушки найдем интегрированием:

$$\Phi_1 = \int d\Phi_1 = \int B(r)adr = \frac{\mu\mu_0 NIa}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu\mu_0 NIa}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} .$$

Учитывая, что полный поток, пронизывающий N витков, равен $\Phi = N\Phi_1$, получим для индуктивности тороидального соленоида:

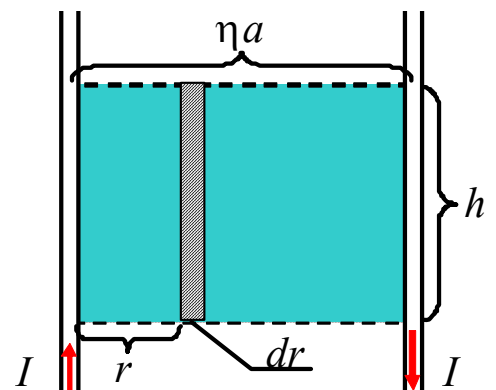
$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 Ia}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} .$$

Пример 2.

Найдите индуктивность L единицы длины двухпроводной линии, если радиус каждого провода в η раз меньше расстояния между их осями. Поле внутри проводов пренебrecь, магнитную проницаемость всюду считать равной единице и $\eta \gg 1$.

Решение.

Индукцию магнитного поля в точках плоской поверхности, натянутой на провода, найдем как суперпозицию полей каждого провода (см. рис.):



$$B_1(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{и} \quad B_2(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(\eta a - r)},$$

$$B(r) = B_1(r) + B_2(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\eta a - r} \right),$$

где a – радиус провода. Поток вектора индукции через полоску длиной h и шириной dr представим в виде

$$d\Phi = B(r)dS = \frac{\mu_0 I h dr}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\eta a - r} \right).$$

Полный поток через выбранную поверхность получим в результате интегрирования:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \left(\int_a^{\eta a - a} \frac{dr}{r} + \int_a^{\eta a - a} \frac{dr}{\eta a - r} \right) = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} 2 \ln \eta.$$

Учитывая, что поток связан с индуктивностью соленоида соотношением $\Phi = LI$, получим индуктивность на единицу длины:

$$L_1 = \frac{\Phi}{hI} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \eta.$$

ЭДС самоиндукции.

Явления при размыкании и замыкании тока в цепи

Пример 3.

Ток в катушке, индуктивность которой $L = 0,1$ Гн, изменяется со временем t по закону $I = I_0(1 + t^2 / \tau^2)$, где $I_0 = 100$ мА, $\tau = 1$ мс. Определите магнитный поток Φ и ЭДС самоиндукции \mathcal{E} в контуре в момент времени $t = \tau$.

Решение.

Величина магнитного потока определяется мгновенной величиной тока соотношением $\Phi(t) = LI(t)$. В момент времени $t = \tau$ поток равен

$$\Phi(\tau) = LI(\tau) = 2LI_0.$$

При изменении силы тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s(t) = -L \frac{dI}{dt} = -2LI_0 \frac{t}{\tau^2},$$

величина которой в момент времени $t = \tau$ равна

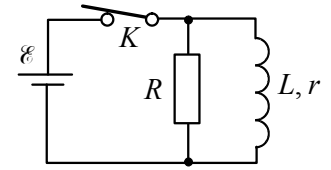
$$\mathcal{E}_s(\tau) = -2L \frac{I_0}{\tau}.$$

Численные значения искомых величин получим, подставляя данные из условия задачи в полученные выражения:

$$\Phi(\tau) = 2LI_0 = 0,02 \text{ Вб}, \quad \mathcal{E}_s(\tau) = -2L \frac{I_0}{\tau} = -20 \text{ В}.$$

Пример 4.

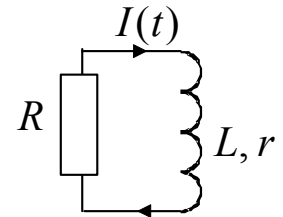
Ключ K в приведенной на рисунке схеме в течение длительного времени был замкнут. Определите зависимость от времени напряжения $U(t)$ на катушке после размыкания ключа в момент $t = 0$. Индуктивность катушки $L = 0,1$ Гн, сопротивление ее обмотки $r = 100$ Ом, сопротивление резистора $R = 100$ кОм, ЭДС источника $\mathcal{E} = 12$ В, его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.



Решение.

До размыкания ключа через резистор и катушку текут постоянные токи, величины которых равны $I_R = \mathcal{E}/R$ и $I_L = \mathcal{E}/r$, так как напряжения на этих элементах одинаковы и равны $U_R = U_L = \mathcal{E}$ в силу малости внутреннего сопротивления источника.

После размыкания ключа уменьшению тока в катушке будет противодействовать ЭДС самоиндукции, что приведет к протеканию в замкнутой цепи (рис.) убывающего со временем тока $I(t)$, значение которого в момент размыкания равно $I_R = \mathcal{E}/R$. Закон Ома для замкнутой RL цепи, в которой действует ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s = -L(dI/dt)$, приводит к следующему дифференциальному уравнению для $I(t)$:



$$(R+r)I(t) = -L \frac{dI}{dt}.$$

После разделения переменных уравнение примет вид:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R+r}{L} dt.$$

Принимая во внимание начальное условие $I(0) = \mathcal{E}/r$, после интегрирования получим:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-\frac{R+r}{L}t}.$$

Напряжение на катушке и резисторе будут одинаковыми и равными

$$U(t) = RI(t) = \mathcal{E} \frac{R}{r} e^{-\frac{R+r}{L}t}.$$

Замечание: Напряжение на катушке сразу после размыкания ключа равно $U(0) = 12 \frac{100 \cdot 10^3}{100} = 12$ кВ, что в тысячу раз больше напряжения на катушке до момента размыкания равного $\mathcal{E} = 12$ В. Постоянная времени процесса размыкания равна $\tau = \frac{L}{R+r} \cong \frac{L}{R} = 10^{-6}$ с.

Сохранение магнитного потока в сверхпроводящем контуре

Пример 5.

Кольцо радиуса $a = 5$ см из тонкой проволоки индуктивности $L = 0,26$ мкГн поместили в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ мТл так, что его плоскость стала перпендикулярной направлению поля. Затем кольцо охладили до сверхпроводящего состояния и выключили магнитное поле. Найдите величину I тока в кольце.

Решение.

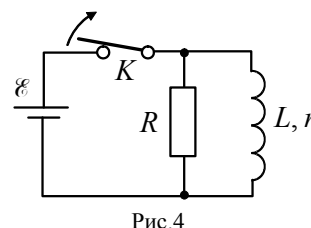
После помещения кольца в магнитное поле B , магнитный поток пронизывающий его, стал равен $\Phi = BS = B\pi a^2$. Когда кольцо охладили до сверхпроводящего состояния и выключили магнитное поле, магнитный поток через кольцо остался неизменным по закону сохранения магнитного потока пронизывающего сверхпроводящий контур. Неизменность потока обеспечивается протеканием индукционного тока в кольце. Равенство первоначального потока потоку, порождаемому индукционным током LI , определяет величину I тока в кольце:

$$I = \frac{B\pi a^2}{L} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 3.14 \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{0.26 \cdot 10^{-6}} \cong 15 \text{ A.}$$

Магнитная энергия контура с током

Пример 6.

Катушка индуктивности $L = 2$ мкГн подключена к источнику постоянной ЭДС $\mathcal{E} = 3$ В. Параллельно катушке включен резистор сопротивлением $R = 2$ Ом (см. рис.). Сопротивление провода катушки $r = 1$ Ом, внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Какое количество теплоты выделится после размыкания ключа K : а) во всей цепи; б) в катушке.



Решение.

После размыкания ключа в замкнутом контуре, состоящем из катушки и резистора, будет циркулировать ток, величина которого будет уменьшаться из-за сопротивлений катушки и резистора. Начальное значение этого тока соответствует току, протекающему через катушку в момент отключения источника $I = \mathcal{E}/r$ (учтено, что в силу малости сопротивления источника напряжения на катушке и резисторе до размыкания ключа равно ЭДС источника).

Работа по протеканию тока после размыкания ключа обеспечивается ЭДС самоиндукции и равна магнитной энергии, запасенной катушкой на момент размыкания ключа. Количество тепла, выделившегося во всей цепи после размыкания ключа, равно запасенной энергии катушки

$$Q = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r^2}.$$

Мощность выделения тепла на катушке и резисторе, с учетом одинаковости величины тока, пропорциональна их сопротивлению, поэтому и полные количества тепла, выделившегося на катушке Q_L и резисторе Q_R , также пропорциональны их сопротивлениям. Этот анализ позволяет свести нахождение величин Q_R и Q_L к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} Q_R + Q_L = \frac{L\varepsilon^2}{2r^2} \\ \frac{Q_R}{Q_L} = \frac{R}{r} \end{cases},$$

решая которую, получим искомые величины:

$$Q = \frac{L\varepsilon^2}{2r^2} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 9}{2 \cdot 1} = 9 \text{ мкДж},$$

$$Q_L = \frac{L\varepsilon^2}{2r(R+r)} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 9}{2 \cdot 3} = 3 \text{ мкДж}.$$

Пример 7.

В сверхпроводящем контуре протекает постоянный ток, энергия магнитного поля которого равна W . Какую работу A следует совершить, чтобы, медленно деформируя контур, уменьшить его индуктивность в n раз?

Решение.

Работа внешней силы по деформации контура равна приращению магнитной энергии контура

$$A = \Delta W.$$

Вычислим энергию контура в его начальном 1 и конечном 2 состояниях

$$W_1 = W = \frac{L_1 I_1^2}{2} \quad \text{и} \quad W_2 = \frac{L_2 I_2^2}{2}$$

где L - индуктивность контура, I - ток в контуре. Значение тока I_2 определяется условием неизменности потока при деформации сверхпроводящего контура

$$L_1 I_1 = L_2 I_2.$$

По условию задачи $L_2 = \frac{L_1}{n}$, поэтому $I_2 = I_1 n$, а энергия контура в конечном состоянии

$$W_2 = \frac{L_2 I_2^2}{2} = \frac{n L_1 I_1^2}{2} = n W.$$

Искомая работа определяется выражением

$$A = W_2 - W_1 = (n - 1)W.$$

Взаимная индуктивность.

Магнитная энергия двух контуров с токами

Пример 8.

Два длинных коаксиальных соленоида содержат n_1 и n_2 витков на единицу длины. Внутренний соленоид, имеющий площадь поперечного сечения S , заполнен магнетиком проницаемости μ . Определите взаимную индуктивность L_{12} соленоидов в расчете на единицу их длины.

Решение.

Обозначим I_2 – ток внутреннего соленоида. Тогда магнитное поле, порождаемое током I_2 , равно $B_2 = \mu\mu_0 n_2 I_2$, направлено вдоль оси соленоидов и однородно по всему поперечному сечению внутреннего соленоида. Поток индукции этого поля пронизывает каждый виток внешнего соленоида. Поэтому поток Φ_1 тока I_2 , пронизывающий n_1 витков внешнего соленоида, равен $\Phi_1 = B_2 S n_1 = \mu\mu_0 n_1 n_2 S I_2$. Выражение этого же потока через коэффициент взаимной индукции имеет вид $\Phi_1 = L_{12} I_2$. Сравнивая выражения для потоков, получим:

$$L_{12} = \mu\mu_0 n_1 n_2 S$$

Замечание. Такой же результат мы получили бы и для L_{21} , рассматривая поток магнитного поля внешнего соленоида $B_1 = \mu\mu_0 n_1 I_1$, пронизывающего n_2 витков внутреннего соленоида: $\Phi_2 = B_1 S n_2 = \mu\mu_0 n_1 n_2 S I_1$.

Пример 9.

Тороидальная катушка содержит $N = 500$ витков провода. Найдите энергию W магнитного поля при токе $I = 2$ А, если магнитный поток через поперечное сечение тора в этом случае $\Phi = 1$ мВб.

Решение.

Полный поток, пронизывающий катушку равен $N\Phi$, поэтому магнитная энергия катушки с током равна

$$W = \frac{N\Phi I}{2}.$$

Выполнив вычисление, найдем

$$W = 0.5 \text{ Дж.}$$

Пример 10.

Катушка и сверхпроводящий виток, индуктивность которого L расположены на большом расстоянии друг от друга. В катушке течет постоянный ток I , задаваемый источником, а ток в витке равен нулю. Определите приращение энергии магнитного поля системы, после того, как виток медленно переместят в положение, где взаимная индуктивность витка и катушки станет равной L_{12} .

Решение.

При приближении сверхпроводящего витка к катушке он попадает в область магнитного поля катушки и в нем индуцируется ток I_1 , величина и направление которого должны обеспечивать неизменность магнитного потока, пронизывающего виток. То есть магнитный поток витка Φ_1 должен оставаться равным нулю:

$$\Phi_1 = LI_1 + L_{12}I = 0.$$

Поэтому величина тока в витке равна

$$I_1 = -\frac{L_{12}I}{L}.$$

Начальная магнитная энергия системы определяется током в катушке $W_1 = W_{\text{кат}}$, конечная включает помимо энергии катушки, которая не изменилась в силу постоянства в ней тока,

собственную энергию витка $\frac{LI_1^2}{2}$ и магнитную энергию взаимодействия витка с катушкой $L_{12}I_1I$. То есть

$$W_2 = W_{\text{кат}} + \frac{LI_1^2}{2} + L_{12}I_1I.$$

Для приращения магнитной энергии системы получим:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -\frac{L_{12}^2 I^2}{2L}$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

Пример 11.

По прямому длинному тонкому проводу, расположенному в вакууме, течет постоянный ток I . Определите энергию W магнитного поля, локализованную внутри коаксиального с проводом цилиндрического слоя с внутренним радиусом r_1 , внешним радиусом r_2 и высотой h .

Решение.

Магнитное поле создаваемое током в точках, удаленных на расстояние r от провода, равно

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Плотность энергии магнитного поля в этих точках пространства

$$w(r) = \frac{B^2(r)}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Энергия, локализованная внутри цилиндрического слоя

$$W = \int w dV.$$

Элементарный объем dV должен быть таким, чтобы в нем плотность энергии, а следовательно, и индукция магнитного поля оставались постоянными. С учетом осевой симметрии распределения поля этому условию удовлетворяет тонкий цилиндрический слой, объем которого равен $dV = (2\pi r dr)h$. Тогда искомая энергия равна

$$W = \int_{r_1}^{r_2} w(2\pi r dr)h = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

«Энергетический» метод расчета индуктивности

Пример 12.

Найдите индуктивность L_1 единицы длины кабеля, представляющего собой два тонкостенных коаксиальных металлических цилиндра, если радиус внешнего цилиндра в $\eta = 3,6$ раза больше внутреннего. Магнитную проницаемость среды между цилиндрами считать равной единице.

Решение.

Если по коаксиальным металлическим цилиндрам пропустить ток I (направление тока по внутреннему и внешнему цилиндрам противоположно), то магнитное поле внутри кабеля

на расстоянии r от оси равно $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Повторив рассуждения, приведенные в примере 11, получим энергию магнитного поля в пространстве между цилиндрами на единицу длины кабеля

$$W_1 = \frac{W}{h} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \eta.$$

Представление этой же энергии через индуктивность единицы длины кабеля имеет вид:

$$W_1 = \frac{W}{h} = \frac{LI^2}{2h} = \frac{L_1 I^2}{2}.$$

Сравнение двух выражений для магнитной энергии дает:

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \eta = 2.6 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$