

Примеры решения задач

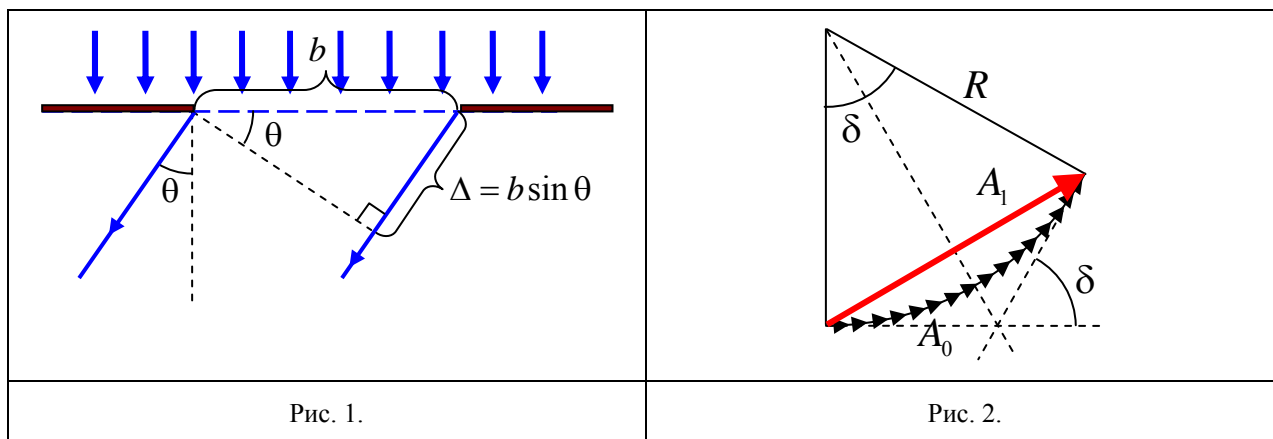
Пример 1.

Свет с длиной волны λ падает нормально на длинную прямоугольную щель ширины b . Найдите угловое распределение интенсивности света при френгоферовой дифракции, а также угловое положение минимумов.

Решение.

Дифракцией Френгофера называют дифракцию «в параллельных лучах», когда разность фаз от вторичных волн, исходящих от различных точек рассматриваемого участка волнового фронта, можно найти в предположении их параллельности. Приближение Френгофера справедливо, если экран удален от щели (или дифракционного отверстия) на достаточно большое расстояние $r \gg b^2 / \lambda$, где b - ширина щели. В этом приближении дифракционная картина и ее расчет существенно упрощаются по сравнению с общим случаем.

Мысленно разобьем щель на множество одинаковых полосок, каждую из которых будем рассматривать как источник вторичных волн. Рассмотрим излучение вторичных источников в направлении, определяемом углом θ (рис.1).



Изобразим цепочку соответствующих элементарных векторов – амплитуд колебаний, возбуждаемых каждой полоской. Соседние элементарные векторы повернуты относительно друг друга на малый угол, который определяется разностью хода волн до удаленной точки наблюдения от соседних полосок.

Если угол θ достаточно мал, то цепочка образует дугу окружности радиуса R (рис. 2). Обозначим длину цепочки A_0 , а модуль результирующего вектора (амплитуду колебаний) A_1 . Тогда, как видно из рис. 2,

$$A_0 = R\delta,$$

$$A_1 = 2R \sin(\delta/2),$$

где

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta$$

- разность фаз между крайними векторами цепочки. Заметим, что при вычислении разности хода волн $\Delta = b \sin \theta$ использовано приближение Френгофера: прямые, проведенные от краев щели в точку наблюдения на удаленном экране, считаются практически параллельными. Исключив R из этих равенств, получим

$$A_1 = A_0 \frac{\sin(\delta/2)}{(\delta/2)}.$$

Отсюда интенсивность ($I \sim A^2$)

$$I_1 = I_0 \frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2},$$

где I_0 - интенсивность в центре дифракционной картины (при $\theta = 0$). С ростом угла θ увеличивается угол δ , и цепочка закручивается. Когда $\delta = 2\pi, 4\pi, 2\pi m$, цепочка замыкается один, два, ..., m раз, и мы приходим к условию минимума:

$$b \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Зависимость интенсивности от угла θ изображена на рис.3.

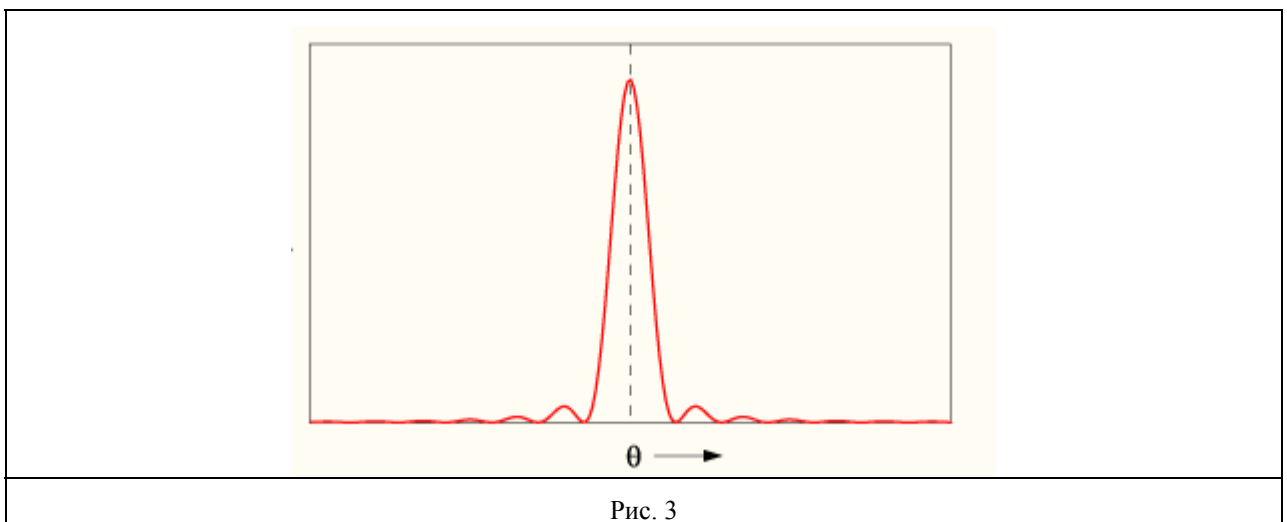


Рис. 3

Пример 2.

На щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ . Ширина щели 4λ . Под каким углом наблюдается второй дифракционный минимум?

Решение.

Условие минимума интенсивности при дифракции на щели:

$$b \sin \theta = m\lambda,$$

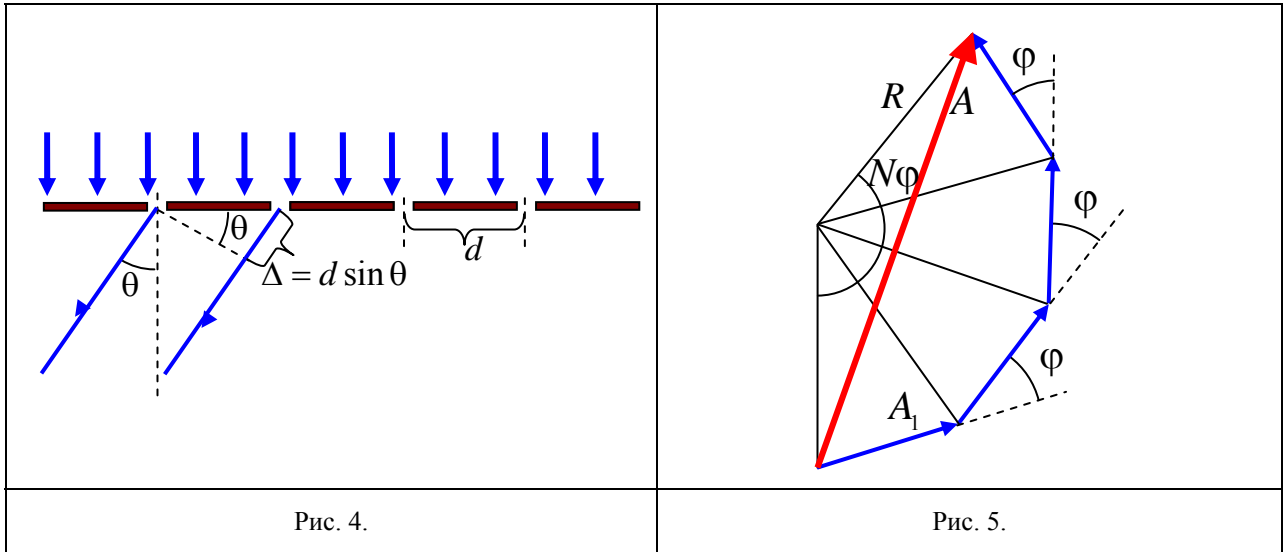
где $b = 4\lambda$ - ширина щели, $m = 2$. Получаем $\theta = 30^\circ$.

Пример 3.

При нормальном падении света на дифракционную решетку угол дифракции для линии $\lambda_1 = 0,65$ мкм во втором порядке равен $\theta_1 = 45^\circ$. Найдите угол дифракции θ_2 для линии $\lambda_2 = 0,50$ мкм в третьем порядке.

Решение.

Дифракционной решеткой называется последовательность из большого числа N одинаковых параллельных щелей. В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля будем рассматривать решетку как совокупность N когерентных синфазных источников, расположенных на расстоянии d друг от друга (рис.4).



На большом расстоянии от решетки в направлении θ происходит сложение N колебаний с одинаковой амплитудой A_1 и интенсивностью I_1 , причем разность фаз колебаний соседних источников равна (рис.4)

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta.$$

Построим векторную диаграмму (рис. 5), рассматривая ее, запишем уравнения

$$A = 2R \sin(N\varphi/2),$$

$$A_1 = 2R \sin(\varphi/2),$$

из которых найдем амплитуду A и интенсивность I результирующих колебаний

$$A = A_1 \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)},$$

$$I = I_1 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}. \tag{1}$$

Амплитуда A_1 и интенсивность I_1 одного источника найдены в примере 1 и зависят от ширины щели b и угла θ :

$$A_1 = A_0 \frac{\sin(\delta/2)}{(\delta/2)}, \quad I_1 = I_0 \frac{\sin^2(\delta/2)}{(\delta/2)^2}, \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta,$$

где A_0 и I_0 - амплитуда и интенсивность при $\theta = 0$ для одной щели.

Главные максимумы (дифракционные максимумы) определяются условием

$$d \sin \theta = m\lambda,$$

где m - целое. Это условие вытекает из общей формулы (1), но может быть получено и более просто: интенсивность максимальна в том случае, когда отдельные щели-источники усиливают друг друга, то есть возбуждают в точке наблюдения синфазные колебания. Это достигается, когда разность хода волн от отдельных щелей равна целому числу длин волн: $\Delta = d \sin \theta = m\lambda$ (рис.4).

В рассматриваемой задаче:

$$d \sin \theta_1 = 2\lambda_1,$$

$$d \sin \theta_2 = 3\lambda_2.$$

Отсюда

$$\sin \theta_2 = \frac{3\lambda_2}{2\lambda_1} \sin \theta_1 \approx 0,82, \quad \theta_2 \approx 55^\circ.$$

Пример 4.

Свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм падает нормально на дифракционную решетку. Найдите ее угловую дисперсию под углом дифракции $\varphi = 60^\circ$.

Решение.

Угловой дисперсией называется производная

$$D = \frac{d\theta_m}{d\lambda},$$

где θ_m - положение главного максимума m -го порядка. Из условия главного максимума

$$d \sin \theta_m = m\lambda$$

получим

$$D = \frac{m}{d \cos \theta_m}.$$

В рассматриваемой задаче $\theta_m = \varphi$, $m/d = \sin \varphi / \lambda$ и $D = \frac{\sin \varphi}{\lambda \cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\lambda} \approx 11$ угл.мин/нм.

Пример 5.

Свет, содержащий две спектральные линии с длинами волн 600,000 и 600,050 нм, падает нормально на дифракционную решетку ширины 10,0 мм. Под некоторым углом дифракции θ эти линии оказались на пределе разрешения (по критерию Рэля). Найдите угол θ .

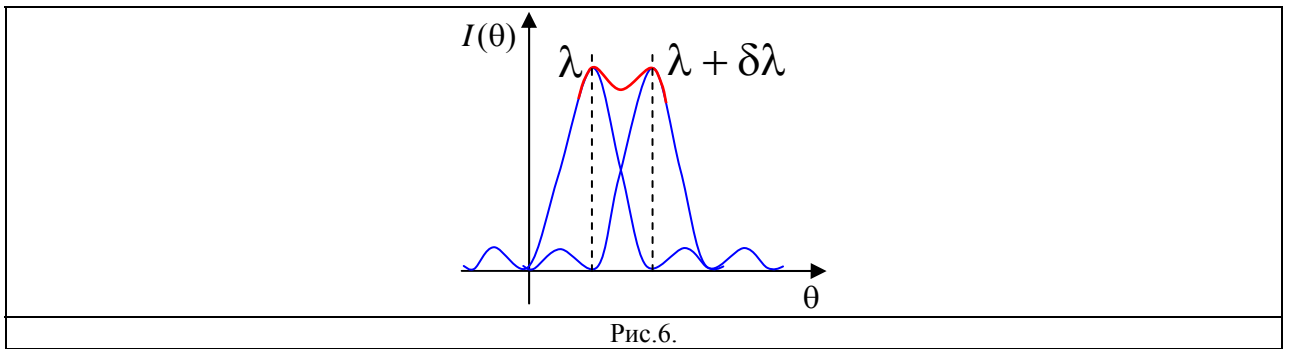
Решение.

Разрешающей способностью называется отношение

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

где $\delta\lambda$ - наименьшая разность длин волн, при которой спектральные линии (дифракционные максимумы), соответствующие длинам волн λ и $\lambda + \delta\lambda$, наблюдаются раздельно (не сливаются). По критерию Рэля две спектральные линии наблюдаются раздельно (разрешены спектральным прибором), если главный максимум при одной длине волны совпада-

ет с первым дифракционным минимумом в том же порядке для другой длины волны (рис.6).



Из формулы (1) примера 3 вытекает, что ближайший к главному максимуму дифракционный минимум определяется условием

$$d \sin \theta = (m + 1/N)\lambda,$$

где N - число освещенных щелей дифракционной решетки. По критерию Рэлея этот минимум совпадает с максимумом при длине волны $\lambda + \delta\lambda$:

$$d \sin \theta = m(\lambda + \delta\lambda).$$

Из записанных выше уравнений получим

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN.$$

В рассматриваемой задаче $\lambda = 600$ нм, $\delta\lambda = 0,050$ нм, $l = 10$ мм,

$$\begin{aligned} l &= Nd, \\ d \sin \theta &= m\lambda, \\ \frac{\lambda}{\delta\lambda} &= mN. \end{aligned}$$

После преобразований найдем:

$$\sin \theta = \frac{\lambda^2}{l\delta\lambda} = 0,72, \quad \theta \approx 46^\circ.$$