Динамика материальной точки.
Примеры решения задач

Пример 1. Обратная задача динамики

Частица массы m движется в плоскости xy со скоростью $\vec{V} = At\vec{i} + Bt^2\vec{j}$*, где A и B – постоянные,* $\vec{i}$ *и* $\vec{j}$ *- орты осей x и y. Найдите модуль результирующей силы, действующей на частицу, в зависимости от времени.*

Решение.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m(A\vec{i} + 2Bt\vec{j}),$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\sqrt{A^2 + 4B^2}.$$

Пример 2. Сила зависит от времени

Частица массы m в момент t = 0 начинает двигаться вдоль оси x из начала координат под действием силы $F = F_x = F_0 \sin\omega t$*, где* F_0 *и* ω *- постоянные. Найдите зависимость от времени: а) проекции скорости тела* V_x*, б) координаты тела x.*

Решение.

а) Записываем второй закон Ньютона:

$$m\frac{dV_x}{dt} = F_x = F_0 \sin\omega t.$$

Делим переменные:

$$m dV_x = F_0 \sin\omega t \cdot dt.$$

Интегрируем

$$\int m dV_x = \int F_0 \sin\omega t \cdot dt.$$

Получаем:

$$mV_x = -\frac{F_0}{\omega}\cos\omega t + C.$$

Определяем постоянную интегрирования C из начального условия $V_x(0) = 0$:

$$0 = -\frac{F_0}{\omega} + C.$$

Следовательно

$$V_x = \frac{1}{m}\left(-\frac{F_0}{\omega}\cos\omega t + \frac{F_0}{\omega}\right) = \frac{F_0}{m\omega}(1 - \cos\omega t).$$

б) Запишем определение скорости:

$$\frac{dx}{dt} = V_x = \frac{F_0}{m\omega}(1 - \cos\omega t).$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\int dx = \int \frac{F_0}{m\omega}(1 - \cos\omega t)dt.$$

Получаем

$$x = \frac{F_0}{m\omega}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right) + C_1 .$$

Учитывая, что при $t = 0$ координата $x = 0$, найдем $C_1 = 0$. Следовательно

$$x = \frac{F_0}{m\omega}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right).$$

Пример 3. Сила зависит от скорости

Частица массы m движется вдоль оси x под действием силы $F_x = -AV_x^2$ (F_x и V_x - проекции силы и скорости на ось x). В начальный момент времени $V_x(0) = V_0$. Найдите $V_x(t)$.

Решение.

Второй закон Ньютона:

$$m\frac{dV_x}{dt} = F_x = -AV_x^2 .$$

Делим переменные:

$$m\frac{dV_x}{V_x^2} = -Adt .$$

Интегрируем:

$$\int m\frac{dV_x}{V_x^2} = -\int Adt .$$

Получаем

$$-\frac{m}{V_x} = -At + C .$$

Находим постоянную интегрирования C из начального условия $V_x(0) = V_0$:

$$-\frac{m}{V_0} = 0 + C .$$

После алгебраических преобразований получаем:

$$V_x = V_0\frac{m}{m + AV_0 t} .$$

Пример 4. Сила зависит от координаты

Частица движется вдоль оси x под действием силы $F_x = F_0 - \varepsilon x$, где F_0 и ε - положительные постоянные, x - расстояние от точки, в которой частица первоначально покоилась. Найдите расстояние, пройденное частицей до остановки.

Решение

Второй закон Ньютона:

$$m\frac{dV_x}{dt} = F_x = F_0 - \varepsilon x .$$

Левую часть уравнения умножаем и делим на dx:

$$m\frac{dV_x}{dt}\frac{dx}{dx} = F_0 - \varepsilon x .$$

Учитывая, что $dx/dt = V_x$, запишем:

$$mV_x \frac{dV_x}{dx} = F_0 - \varepsilon x .$$

Делим переменные и интегрируем:

$$m\int V_x dV_x = (F_0 - \varepsilon x)dx .$$

Получаем:

$$m\frac{V_x^2}{2} = F_0 x - \varepsilon \frac{x^2}{2} = x\left(F_0 - \frac{\varepsilon x}{2} \right).$$

Скорость равна нулю при $x = 0$ (это точка старта) и при $x = l = 2F_0 / \varepsilon$ (это координата точки разворота частицы). Итак, путь, пройденный частицей до остановки равен

$$l = \frac{2F_0}{\varepsilon} .$$