Кинематика точки

Задачи

(A, B, C – положительные постоянные, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ - орты осей X, Y и Z)

1. Материальная точка движется вдоль оси x по закону: $x(t) = Bt + A\cos\omega t$. Найдите проекцию скорости $V_x(t)$.
2. Материальная точка движется вдоль оси x по закону: $x(t) = At^3$. Найдите проекцию ускорения $a_x(t)$ в зависимости от времени
3. Материальная точка движется вдоль оси x по закону: $x(t) = At + B\sin\omega t$. Найдите проекцию ускорения $a_x(t)$ в зависимости от времени.
4. Задан закон движения частицы в плоскости xy: $\vec{r} = At\vec{e}_x + (Bt^2 + C)\vec{e}_y$. Найдите уравнение траектории $y(x)$.
5. Задан закон движения частицы в плоскости xy: $\vec{r} = At\vec{e}_x + Bt^2\vec{e}_y$. Найдите модуль вектора ускорения $a(t)$.
6. Задан закон движения частицы в плоскости xy: $\vec{r} = At^2\vec{e}_x + Bt\vec{e}_y$. Найдите модуль вектора скорости $V(t)$.
7. Материальная точка движется вдоль оси x так, что $V_x = At^2$. В начальный момент времени координата точки $x(0) = B$. Найдите $x(t)$.
8. Материальная точка движется вдоль оси x так, что $V_x = At^3$. В начальный момент времени координата точки $x(0) = B$. Найдите $x(t)$.
9. Материальная точка движется вдоль оси x так, что $V_x = A\sqrt{t}$. В начальный момент времени координата точки $x(0) = 0$. Найдите $x(t)$.
10. Материальная точка движется вдоль оси x так, что $a_x = At$. В начальный момент времени $x(0) = 0$, $V_x(0) = 0$. Найдите $V_x(t)$, $x(t)$.
11. Материальная точка движется вдоль оси x так, что $a_x = -A\sqrt{\upsilon_x}$. В начальный момент времени $\upsilon_x(0) = \upsilon_0$. Найдите $\upsilon_x(t)$.
12. Материальная точка движется вдоль оси x так, что $a_x = -AV_x^2$. В начальный момент времени $V_x(0) = V_0$. Найдите $V_x(t)$.
13. Материальная точка движется в плоскости xy так, что $\vec{\upsilon} = At^2\vec{e}_x + Bt\vec{e}_y$. Известно, что $\vec{r}(0) = C\vec{e}_y$. Найдите $\vec{r}(t)$, $\upsilon(t)$, $a_x(t)$, $a(t)$, уравнение траектории.
14. Материальная точка движется в плоскости xy так, что $\vec{V} = At\vec{e}_x + Bt^2\vec{e}_y$. Известно, что $\vec{r}(0) = C\vec{j}$. Найдите $\vec{r}(t)$.
15. Материальная точка движется в плоскости xy так, что $\vec{V} = At\vec{i} + B\vec{j}$. Известно, что $\vec{r}(0) = C(\vec{i} + \vec{j})$. Найдите $\vec{r}(t)$.

Ответы

1. $V_x = B - A\omega\sin\omega t$
2. $a_x = 6At$

3. $a_x = -B\omega^2 \sin\omega t$

4. $y = \dfrac{B}{A^2}x^2 + C$

5. $a(t) = 2B$

6. $V = \sqrt{(2At)^2 + B^2}$

7. $x = \dfrac{A}{3}t^3 + B$.

8. ….
9. ….

10. $V_x = \left(\sqrt{V_0} - \dfrac{At}{2}\right)^2$

11. $V_x = \dfrac{V_0}{1 + AV_0 t}$

12. ….

13. $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = \dfrac{A}{3}t^3\vec{e}_x + \left(\dfrac{B}{2}t^2 + C\right)\vec{e}_y$, $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(At^2)^2 + (Bt)^2}$,

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 2At,\quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2At)^2 + B^2},\quad y = \frac{B}{2}t^2 + C = \frac{B}{2}\left(\frac{3x}{A}\right)^{2/3} + C.$$

14. $\vec{r}(t) = \dfrac{At^2}{2}\vec{e}_x + \left(\dfrac{Bt^3}{3} + C\right)\vec{e}_y$

15. …

Решения некоторых задач

1. Материальная точка движется вдоль оси x по закону: $x(t) = Bt + A\cos\omega t$. Найдите проекцию скорости $V_x(t)$.

Решение. По определению: $V_x = \dfrac{dx}{dt}$. Вычисляем производную:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = x' = (Bt + A\cos\omega t)' = B - A\omega\sin\omega t.$$

3. Материальная точка движется вдоль оси x по закону: $x(t) = At + B\sin\omega t$. Найдите проекцию ускорения $a_x(t)$ в зависимости от времени.

Решение. По определению: $V_x = \dfrac{dx}{dt}$, $a_x = \dfrac{dV_x}{dt}$. Вычисляем:

$$V_x = x' = A + B\omega\cos\omega t,\quad a_x = (A + B\omega\cos\omega t)' = -B\omega^2\sin\omega t.$$

5. Задан закон движения частицы в плоскости xy: $\vec{r} = At\cdot\vec{i} + Bt^2\cdot\vec{j}$. Найдите модуль вектора ускорения $a(t)$.

Решение. По определению: $\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$. Вычисляем производные:

$$\vec{\upsilon}=(At\cdot\vec{i}+Bt^2\cdot\vec{j})'=A\cdot\vec{i}+2Bt\cdot\vec{j}\,,\qquad \vec{a}=(A\cdot\vec{i}+2Bt\cdot\vec{j})'=2B\vec{j}$$

а затем модуль вектора ускорения: $a=|\vec{a}|=2B$.

7. Материальная точка движется вдоль оси x так, что $V_x=At^2$. В начальный момент времени координата точки $x(0)=B$. Найдите $x(t)$.

Решение. По определению: $V_x=\frac{dx}{dt}$. В данной задаче $V_x=At^2$, поэтому:

$$\frac{dx}{dt}=At^2$$

-это дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции времени $x(t)$. Для того, чтобы решить это уравнение, сначала «разделим переменные»:

$$dx=At^2dt$$

(левая часть зависит только от x, а правая – только от t), а затем проинтегрируем:

$$\int dx=\int At^2dt\,.$$

Вычисляя интегралы, получим

$$x=\frac{A}{3}t^3+C\,,$$

где C - произвольная постоянная, которую найдем условия $x(0)=B$:

$$x(0)=\frac{A}{3}t^3+C_{|t=0}=C\,.$$

Итак, $C=B$ и $x=\frac{A}{3}t^3+B$.

9. Материальная точка движется вдоль оси x так, что $V_x=A\sqrt{t}$. В начальный момент времени координата точки $x(0)=0$. Найдите $x(t)$.

Решение. По определению: $V_x=\frac{dx}{dt}$. В данной задаче $V_x=A\sqrt{t}$, поэтому:

$$\frac{dx}{dt}=A\sqrt{t}\,.$$

Делим переменные:

$$dx=A\sqrt{t}dt$$

Интегрируем:

$$\int dx=\int A\sqrt{t}dt\,.$$

Получаем

$$x=\frac{2}{3}At^{3/2}+C\,.$$

Постоянную интегрирования C находим из начальных условий:

$$x(0)=0=C\,.$$

Итак, $x = \frac{2}{3} A t^{3/2}$.

11. Материальная точка движется вдоль оси x так, что $a_x = -A\sqrt{\upsilon_x}$. В начальный момент времени $\upsilon_x(0) = \upsilon_0$. Найдите $\upsilon_x(t)$.

Решение. По определению: $a_x = \frac{dV_x}{dt}$. Поэтому:

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = -A\sqrt{\upsilon_x}\ .$$

Разделяем переменные: $$\frac{d\upsilon_x}{\sqrt{\upsilon_x}} = -Adt\ .$$

Интегрируем: $$\int \frac{d\upsilon_x}{\sqrt{\upsilon_x}} = -\int Adt\ .$$

Получаем: $$2\upsilon_x^{1/2} = -At + C\ .$$

Из начальных условий $\upsilon_x(0) = \upsilon_0$ следует: $2\upsilon_0^{1/2} = C$. Итак:

$$2\upsilon_x^{1/2} = -At + 2\upsilon_0^{1/2} \text{ и } \upsilon_x = \left(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{A}{2}t\right)^2.$$

13. Материальная точка движется в плоскости xy так, что $\vec{\upsilon} = At^2 \cdot \vec{i} + Bt \cdot \vec{j}$. Известно, что $\vec{r}(0) = C \cdot \vec{j}$. Найдите $\vec{r}(t), \upsilon(t), a_x(t), a(t)$, уравнение траектории.

Решение. По определению: $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$. Поэтому:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = (At^2 \cdot \vec{i} + Bt \cdot \vec{j})' = 2At \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}\ ,$$

$$a_x = 2At\ , \qquad a = |\vec{a}| = \sqrt{(2At)^2 + B^2}\ ,$$

По определению: $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Следовательно:

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt = (At^2 \cdot \vec{i} + Bt \cdot \vec{j})dt\ ,$$

$$\int d\vec{r} = \int (At^2 \cdot \vec{i} + Bt \cdot \vec{j})dt\ .$$

После интегрирования получим:

$$\vec{r} = \frac{A}{3}t^3 \cdot \vec{i} + \frac{B}{2}t^2 \cdot \vec{j} + \vec{D}\ .$$

Из условия $\vec{r}(0) = C \cdot \vec{j}$ найдем: $\vec{D} = C \cdot \vec{j}$. Следовательно:

$$\bar{r} = \frac{A}{3} t^3 \cdot \vec{i} + \left(\frac{B}{2} t^2 + C \right) \cdot \vec{j} .$$

Находим проекции вектора $\vec{r}$ на координатные оси:

$$\begin{cases} x = \dfrac{A}{3} t^3 \\ y = \dfrac{B}{2} t^2 + C \end{cases} .$$

Выражая из первого уравнения t и подставляя во второе, получим уравнение траектории:

$$y = \frac{B}{2} \left(\frac{3x}{A} \right)^{2/3} + C .$$