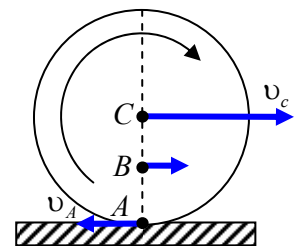


# Кинематика криволинейного движения

## Кинематика твердого тела

### Задачи

1. Материальная точка движется в плоскости  $xy$ . Задан закон движения  $x(t) = At$ ,  $y(t) = Bt^2$ . Найдите: а) модуль тангенциального ускорения в зависимости от времени, б) модуль нормального ускорения при  $t = 0$ , в) радиус кривизны траектории при  $t = 0$ .
2. Материальная точка движется в плоскости  $xy$ . Задан закон движения  $x(t) = At^2$ ,  $y(t) = Bt$ . Найдите: а) модуль тангенциального ускорения в зависимости от времени, б) модуль нормального ускорения при  $t = 0$ , в) радиус кривизны траектории при  $t = 0$ .
3. Материальная точка движется в плоскости  $xy$ . Задан закон движения  $x(t) = At$ ,  $y(t) = Bt^3$ . Найдите: а) модуль тангенциального ускорения в зависимости от времени, б) модуль нормального ускорения при  $t = 0$ , в) радиус кривизны траектории при  $t = 0$ .
4. Материальная точка движется в плоскости  $xy$ . Задан закон движения  $x(t) = At^3$ ,  $y(t) = Bt^2$ . Найдите модуль вектора полного ускорения точки  $a(t)$  в зависимости от времени.
5. Закон движения материальной точки задан уравнениями  $x = 2b \cos^2(\omega t)$ ,  $y = b \sin(2\omega t)$ , где  $b$  и  $\omega$  - положительные постоянные. Найдите: а) уравнение траектории материальной точки; б) величину скорости материальной точки; в) величину тангенциального ускорения; г) величину нормального ускорения; д) радиус кривизны траектории.
6. Тело брошено со скоростью  $\vec{v}_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Найдите в верхней точке траектории: а) модуль скорости, в) модуль тангенциального ускорения, г) модуль нормального ускорения, д) радиус кривизны траектории.
7. Камень брошено со скоростью  $\vec{v}_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Найдите в начальной точке траектории а) модуль тангенциального ускорения, б) модуль нормального ускорения, в) радиус кривизны траектории.
8. Колесо радиуса  $R = 0,1$  м катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Скорость оси колеса постоянна и равна  $v_c = 2$  м/с. Вычислите скорость, ускорение и радиус кривизны траектории верхней точки  $A$  обода колеса в  $K$ -системе отсчета, связанной с горизонтальной поверхностью.
9. При резком ускорении колесо автомобиля проскальзывает относительно полотна дороги. Скорость точки  $A$  (см. рис.) относительно земли равна  $v_A = 4$  м/с, а скорость точки  $C$  (центра колеса) равна  $v_C = 20$  м/с. Определите скорость точки  $B$ , расположенной посередине между  $A$  и  $C$ .



### Ответы

1.  $a_\tau = \frac{4B^2t}{\sqrt{A^2 + (2Bt)^2}}, a_n = 2B, r = \frac{A^2}{2B}$
2.  $a_\tau = \frac{4A^2t}{\sqrt{B^2 + 4A^2t^2}}, a_n = 2A, r = \frac{B^2}{2A}$
3.  $a_\tau = \frac{18B^2t^3}{\sqrt{A^2 + (3Bt^2)^2}}, a_n(0) = 0, r(0) \rightarrow \infty$
4.  $a = \sqrt{(6At)^2 + (2B)^2}$
5.  $\left(\frac{x}{b} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, V = 2b\omega, a_\tau = 0, a_n = 4b\omega^2, r = b$
6.  $R = \frac{(V_0 \cos \alpha)^2}{g}$
7.  $r = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}$
8.  $v_A = 4 \text{ м/с}; a = 40 \text{ м/с}^2$ , вектор ускорения направлен к центру колеса;  $\rho = 4R = 0,4 \text{ м}$
9.  $v_B = (v_C - v_A) / 2 = 8 \text{ м/с}$

## Решения некоторых задач

1. Материальная точка движется в плоскости  $xy$ . Задан закон движения  $x(t) = At, y(t) = Bt^2$ . Найдите: а) модуль тангенциального ускорения в зависимости от времени, б) модуль нормального ускорения при  $t = 0$ , в) радиус кривизны траектории при  $t = 0$ .

Решение.

Сначала найдем проекции скорости и ускорения на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (At)' = A, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = (Bt^2)' = 2Bt,$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = (2Bt)' = 2B.$$

По определению тангенциального ускорения:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt},$$

где модуль скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{A^2 + 4B^2t^2}.$$

Вычисляем производную:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \left(\sqrt{A^2 + 4B^2t^2}\right)' = \frac{4B^2t}{\sqrt{A^2 + 4B^2t^2}}. \quad (1)$$

Нормальное ускорение найдем из соотношения:

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2,$$

где квадрат полного ускорения равен:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = (2B)^2.$$

Следовательно:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{(2B)^2 - a_\tau^2}.$$

Подставив в это выражение формулу (1) можно получить нормальное ускорение в произвольный момент времени  $t$ . Но нас интересует момент  $t = 0$ . При этом из (1) следует, что  $a_\tau = 0$ . Поэтому

$$a_n(0) = 2B.$$

Радиус кривизны траектории найдем из формулы  $a_n = v^2 / r$ . При  $t = 0$  скорость  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{A^2 + 4B^2 t^2} = A$  и радиус кривизны

$$r = \frac{v^2}{a_n} = \frac{A^2}{2B}.$$

4. Материальная точка движется в плоскости  $xy$ . Задан закон движения  $x(t) = At^3$ ,  $y(t) = Bt^2$ . Найдите модуль вектора полного ускорения точки  $a(t)$  в зависимости от времени.

Решение. Находим проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (At^3)' = 3At^2, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = (3At^2)' = 6At,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (Bt^2)' = 2Bt, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = (2Bt)' = 2B,$$

а затем модуль вектора ускорения:  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(6At)^2 + 4B^2}$ .

5. Закон движения материальной точки задан уравнениями  $x = 2b \cos^2(\omega t)$ ,  $y = b \sin(2\omega t)$ , где  $b$  и  $\omega$  - положительные постоянные. Найдите: а) уравнение траектории материальной точки; б) величину скорости материальной точки; в) величину тангенциального ускорения; г) величину нормального ускорения; д) радиус кривизны траектории.

Решение.

а) Выводим уравнение траектории:

$$\frac{x}{2b} = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \Rightarrow$$

$$\cos^2(2\omega t) = \left(\frac{x}{b} - 1\right)^2,$$

$$\sin^2(2\omega t) = \left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

Отсюда

$$\left(\frac{x}{b} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (1)$$

б) Вычисляем скорость:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -4b\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) = -2b\omega \sin(2\omega t),$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 2b\omega \cos(2\omega t).$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 2b\omega.$$

в) По определению тангенциального ускорения

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0.$$

г) Сначала найдем полное ускорение

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2} = 4b\omega^2,$$

а затем вычислим нормальное ускорение

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = a = 4b\omega^2$$

д) Используя формулу  $a_n = V^2 / r$ , вычислим радиус кривизны траектории:

$$r = \frac{V^2}{a_n} = b$$

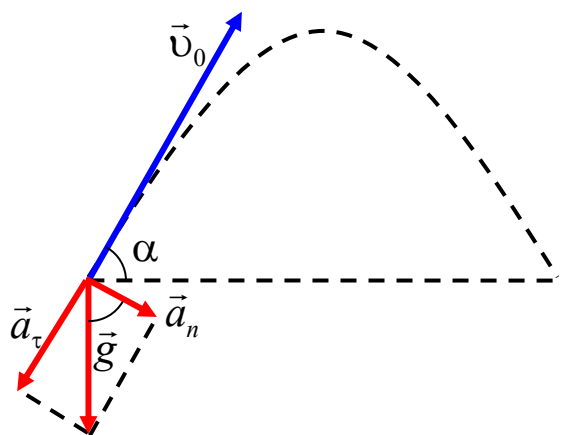
Все понятно: точка равномерно со скоростью  $V = 2b\omega$  движется по окружности радиуса  $b$ . Уравнение этой окружности выражается формулой (1). Координаты центра окружности:  $(b, 0)$ .

7. Камень брошен со скоростью  $\vec{v}_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Найдите в начальной точке траектории: а) модуль тангенциального ускорения, б) модуль нормального ускорения, в) радиус кривизны траектории.

Решение. Вектор ускорения в любой точке траектории направлен вертикально вниз, а его величина равна ускорению свободного падения  $g$ :

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

На рисунке вектор ускорения представлен в виде суммы нормального  $\vec{a}_n$  и тангенциального  $\vec{a}_\tau$  ускорений:  $\vec{a} = \vec{g} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ .



В начальной точке траектории угол между вектором скорости и вектором ускорения равен  $\beta = \alpha + \pi/2$ . При этом, как видно из рисунка:

$$a_n = |\vec{a}_n| = g \cos \alpha, \quad a_\tau = |\vec{a}_\tau| = g \sin \alpha.$$

Радиус  $r$  кривизны траектории в начальной точке найдем из формулы  $a_n = v_0^2 / r$ :

$$r = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}.$$

8. Колесо радиуса  $R = 0,1$  м катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Скорость оси колеса постоянна и равна  $v_c = 2$  м/с. Вычислите скорость, ускорение и радиус кривизны траектории верхней точки  $A$  обода колеса в  $K$ -системе отсчета, связанной с горизонтальной поверхностью.

Решение.

1) Рассмотрим движение колеса в  $K'$ -системе отсчета, которая движется поступательно вместе с центром колеса. В этой системе отсчета колесо вращается вокруг неподвиж-

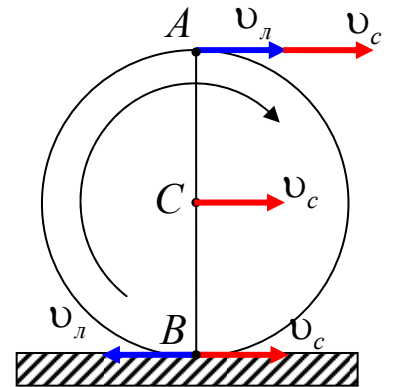
ной оси, проходящей через его центр, с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Скорости точек обода колеса направлены по касательной к ободу и определяются формулой  $v_n = \omega R$  - эту скорость называют линейной скоростью.

2) Скорость точки обода колеса относительно неподвижной  $K$ -системы отсчета определяется формулой:

$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_c,$$

где  $v_n$  - скорость точки относительно «движущейся»  $K'$ -системы отсчета,  $v_c$  - скорость «движущейся» системы отсчета относительно неподвижной.

В отсутствие проскальзывания скорость нижней точки  $B$  колеса (рис.) равна нулю:  $0 = v_c - v_n$ . Следовательно, в этом случае линейная скорость точек обода колеса равна скорости его.



3) Скорость верхней точки  $A$  колеса равна

$$v_A = v_n + v_c = 2v_c = 4 \text{ м/с.}$$

Заметим, что этот результат можно получить другим способом. Точка  $B$ , покоящаяся в каждый данный момент времени в неподвижной системе отсчета, называется мгновенной осью вращения. Скорость любой точки колеса в этот момент может быть вычислена по формуле  $v = \omega r$ , где  $r$  - расстояние от точки до мгновенной оси вращения (строго  $\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]$ , где  $\vec{r}$  проведен от мгновенной оси к выбранной точке колеса). Тогда

$$v_c = \omega R, \quad v_A = \omega 2R.$$

Из этих уравнений следует  $v_A = 2v_c = 4 \text{ м/с}$ .

5) Ускорение произвольной точки одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Проще всего вычислит ускорение в  $K'$ -системе отсчета, где каждая точка обода колеса движется с постоянной скоростью  $v_c$ . Нормальное ускорение этих точек равно

$$a = \frac{v_n^2}{R} = \frac{v_c^2}{R} = 40 \text{ м/с}^2.$$

Такое же ускорение всех точек обода колеса будет в инерциальной  $K$ -системе отсчета. Радиус кривизны точки  $A$  в  $K$ -системе отсчета равен

$$r_A = \frac{v_A^2}{a} = \frac{v_A^2}{v_c^2} R = 4R = 0,4 \text{ м.}$$

9. При резком ускорении колесо автомобиля проскальзывает относительно полотна дороги. Скорость точки  $A$  (см. рис.) относительно земли равна  $v_A = 4 \text{ м/с}$ , а скорость точки  $C$  (центра колеса) равна  $v_C = 20 \text{ м/с}$ . Определите скорость точки  $B$ , расположенной посередине между  $A$  и  $C$ .

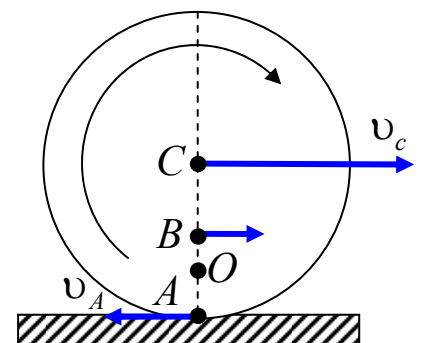
Решение.

Так как скорости точек  $A$  и  $C$  направлены противоположно и горизонтально, то мгновенная ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа, пересекает его плоскость в точке  $O$ , принадлежащей отрезку  $AC$ .

Обозначим  $OC = r_C$ ,  $OA = r_A$ . Тогда

$$v_C = \omega r_C = \omega(R - r_A),$$

$$v_A = \omega r_A,$$



$$v_B = \omega \left( \frac{R}{2} - r_A \right).$$

Из этих уравнений получим ответ:  $v_B = (v_C - v_A)/2 = 8 \text{ м/с}$ .