Механические колебания

Гармонические колебания

Общие определения. Колебаниями называют периодическое или почти периодическое движение или процесс.

Если колебания происходят при отклонения системы от устойчивого положения равновесия без внешних воздействий, то их называют свободными или собственными. Колебания характеризуются периодом T или частотой $\nu = 1/T$ (измеряется в герцах: Гц).

Гармонические колебания. Колебания величины x называют гармоническими, если величина x изменяется со временем t по закону:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{1}$$

где A — амплитуда колебаний, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ - фаза_колебаний, φ_0 - начальная фаза, $\omega = 2\pi/T$ - циклическая, или круговая, частота колебаний.

Первая и вторая производные величины x по времени

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2),$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) \tag{2}$$

также совершают гармонические колебания с той же частотой, но с иными амплитудами и начальными фазами. Если x - координата точки, то $\dot{x} = \upsilon_x$ - ее скорость, $\ddot{x} = a_x$ - ускорение.

Пример 1. Известны начальные (при $t = 0$) значения величины x: $x(0) = x_0$ и ее производной: $\dot{x}(0) = \upsilon_0$. Следует определить амплитуду и начальную фазу колебаний.

Решение: Из уравнений

$$x_0 = A\cos(\varphi_0) \text{ и } \upsilon_0 = -A\omega\sin(\varphi_0)$$

находим

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\upsilon_0/\omega)^2} \text{ и } \operatorname{tg}\varphi_0 = -\upsilon_0/(\omega x_0).$$

Уравнение гармонических колебаний. Как видно из формул (2), если величина x изменяется по закону гармонических колебаний (1), то она удовлетворяет уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3}$$

Верно и обратное утверждение: если уравнение движения физической системы, состояние которой определяется величиной x, приводится к виду

$$\ddot{x} + \gamma x = 0,$$

где γ - положительная постоянная, то решение этого уравнения можно записать в виде

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\gamma}$, а постоянные A и φ_0 определяются начальными условиями (см. пример 1).

Динамика гармонических колебаний

Грузик на пружине. Пусть грузик массы m, подвешенный на невесомой пружине жесткости k, совершает вертикальные колебания. Возьмем начало на оси X в положении равновесия, где

$$mg = k\Delta l,$$

Δl - растяжение пружины в этом положении. Тогда, основное уравнение динамики имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - k(x + \Delta l) = -kx,$$

или

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0. \qquad (4)$$

Решение этого уравнения выражается формулой (1), где $\omega = \sqrt{k/m}$. Период колебаний грузика $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Уравнение (4) можно получить и энергетическим методом. Считая, что потенциальная энергия силы тяжести равна нулю в положении равновесия, запишем для механической энергии системы:

$$E = \frac{m(\dot{x})^2}{2} + \frac{k(\Delta l + x)^2}{2} - mgx = \frac{m(\dot{x})^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{k\Delta l^2}{2}.$$

Дифференцируя энергию по времени, получим уравнение (5).

Математический маятник. Математический маятник – это груз малых размеров, подвешенный на легкой нерастяжимой нити. Выберем положительное направление отсчета угла α - против часовой стрелки. Тогда ось вращения Z направлена «на нас», а момент силы тяжести относительно этой оси

$$M_z = -mgl\sin\alpha,$$

где m - масса груза, l - длина нити, α - угол отклонения нити от вертикали. Уравнение динамики вращательного движения принимает вид:

$$I\ddot{\alpha} = -mgl\sin\alpha,$$

где $I = ml^2$ - момент инерции. При малых колебаниях $\alpha << 1$ и $\sin\alpha \approx \alpha$. Получаем дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\alpha} + \left(\frac{g}{l}\right)\alpha = 0.$$

Следовательно, $\omega = \sqrt{g/l}$, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Физический маятник. Это твердое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной оси, жестко связанной с телом.

………..

………..

$$\omega = \sqrt{mgl/I}, \quad T = 2\pi\sqrt{I/mgl}.$$

Получим эту формулу энергетическим методом:

$$E = \frac{I(\dot{\alpha})^2}{2} - mgl\cos\alpha.$$

После дифференцирования получим

…………

………….

Грузик на струне. Рассмотрим натянутую струну с закрепленными концами, в средней точке которой закреплена точечная масса m. Струну считаем невесомой, амплитуду колебаний малой, предполагается, что сила натяжения F струны при колебаниях остается практически неизменной. Силу тяжести учитывать не будем

…………

………….

Энергия колебаний

Рассмотрим в качестве примера горизонтальный пружинный маятник. Его полная механическая энергия $E = U + E_k$, где

$$U = \frac{kx^2}{2},\ E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m(\dot{x})^2}{2}.$$

Учитывая, что $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ и $\omega^2 = k/m$, получим

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi),$$

$$E_k = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi).$$

Из этих формул видно, что кинетическая энергия максимальна, когда потенциальная энергия равна нулю, и наоборот. Полная энергия маятника не зависит от времени

$$E = \frac{kA^2}{2}\left(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\right) = \frac{kA^2}{2} \qquad (5)$$

и пропорциональна квадрату амплитуды колебаний (это важно помнить).

Общие выводы.

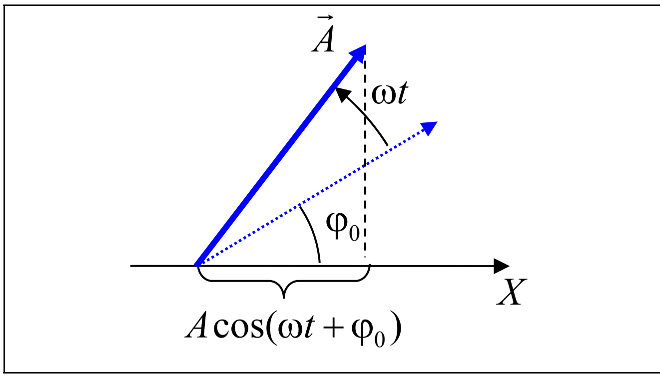
1) Свободные колебания тела (осциллятора) в отсутствие трения являются гармоническими, если действующая сила (или момент силы) является квазиупругой, то есть силой, направленной к положению равновесия и зависящей от смещения из положения равновесия линейно.

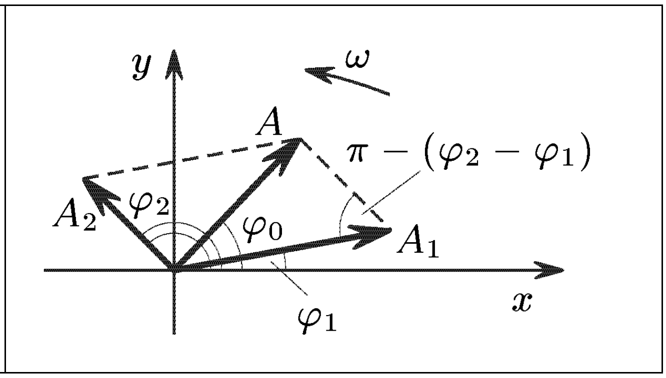
2) Частота и период свободных колебаний осциллятора зависят только от свойств самого осциллятора, а амплитуда и начальная фаза определяются начальными условиями.

3) При гармонических колебаний кинетическая и потенциальная энергии периодически изменяются, а их сумма – полная механическая энергия – остается постоянной.

Сложение колебаний

Метод векторных диаграмм. Сложение колебаний с одинаковыми частотами. Закон гармонических колебаний (1) может быть получен как проекция на ось x радиус-вектора $\vec{A}$, модуль которого равен амплитуде колебаний A. Этот вектор равномерно вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω от начального углового положения φ_0 (в этом случае угол с осью x меняется по закону $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, см. рис.). Такой подход называется методом векторных диаграмм; он особенно удобен при сложении гармонических колебаний, так как позволяет сложение функций заменить наглядным сложением векторов (проекция суммы векторов равна сумме проекций).





Сложение гармонических колебаний одинаковых частот и одного направления. Сумма двух гармонических колебаний одинаковой частоты, амплитуды которых равны A_1 и A_2, а начальные фазы - φ_1 и φ_2, представляет собой гармоническое колебание такой же частоты, а амплитуда и начальная фаза которого могут быть найдены методом векторных диаграмм (рис.):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\,, \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\,.$$

(параллелограмм на векторной диаграмме вращается с угловой скоростью ω как одно целое). Разность фаз колебаний одинаковой частоты не меняется со временем. Такие колебания (с одинаковыми частотами и постоянной разностью фаз) называются <u>когерентными</u>.

Из формулы (6) видно, что амплитуда A результирующих колебаний существенно зависит от разности фаз $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$. При сложении синфазных колебаний ($\delta = 2\pi m$) амплитуда максимальна, при сложении противофазных колебаний ($\delta = \pi + 2\pi m$) амплитуда минимальна:

$$A_{\max} = A_1 + A_2\,, \quad A_{\min} = |A_2 - A_1|\,.$$

Энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Из формулы (6) следует, что энергия результирующих колебаний не может быть представлена как сумма энергий складываемых колебаний, то есть $E \neq E_1 + E_2$.

<u>Биения</u>. При сложении колебаний с разными частотами возникает сложный, в общем случае, непериодический процесс. Если частоты ω_1 и ω_2 складываемых колебаний близки по величине ($\omega_1 \approx \omega_2 >> |\Delta\omega|$, где $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$), то результирующие колебания имеют характер <u>биений</u> - так называют колебания с пульсирующей амплитудой (рис.1).

В качестве примера найдем сумму двух колебаний с одинаковыми амплитудами, начальными фазами, равными нулю, и близкими частотами:

$$x(t) = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right). \tag{7}$$

Полученное выражение представим в виде $x(t) = A_0(t)\cos(\omega t)$, где

$$A_0(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right);\ \omega = (\omega_1+\omega_2)/2 \approx \omega_1 \approx \omega_2\,.$$

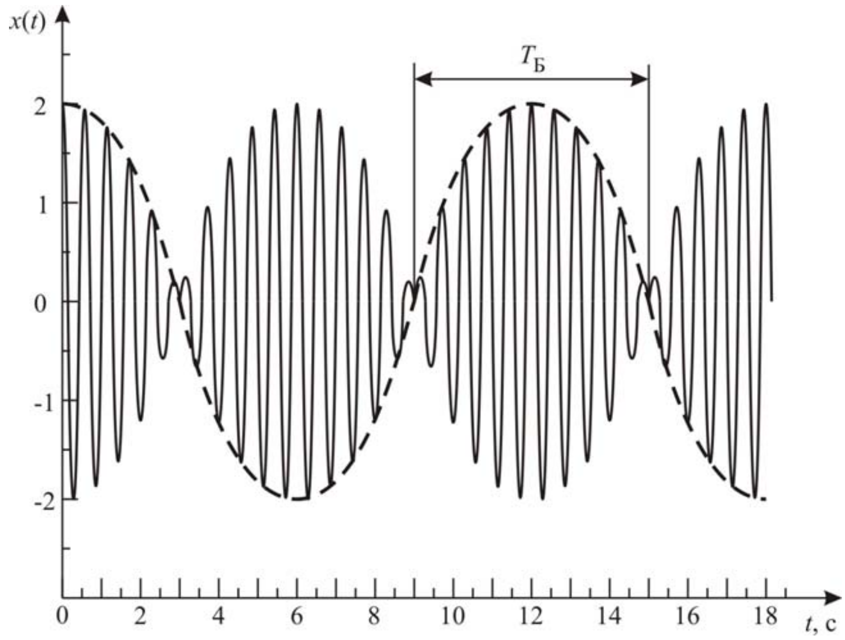


Рис.1. График биений, рассчитанный по формуле (7) при $A=1$, $\omega_1 = 10\,c^{-1}$, $\omega_2 = 11\,c^{-1}$ (сплошная кривая). Штриховая кривая рассчитана по формуле $A_0(t) = 2A\cos\left((\omega_2 - \omega_1)t/2\right)$

Величину $|A_0(t)|$ можно назвать *медленно изменяющейся амплитудой*. На рис.1 приведен рассчитанный по формуле (7) график при $A=1$, $\omega_1 = 10\ \text{c}^{-1}$, $\omega_2 = 11\ \text{c}^{-1}$. *Периодом биений* $T_Б$ называют минимальное время, за которое амплитуда колебаний периодически достигает своего минимального (или максимального) значения. Период изменения функции $A_0(t) = 2A\cos\left[(\Delta\omega/2)t\right]$ равен $T_0 = 2\pi/(\Delta\omega/2) = 4\pi/\Delta\omega$, а период биений, равный периоду функции $|A_0(t)|$, как видно из рис.1, в два раза меньше: $T_Б = 2\pi/\Delta\omega$.

Заметим, что при биениях параллелограмм на векторной диаграмме деформируется со временем (один вектор вращается быстрее другого), модуль результирующего вектора меняются, т.е. движение не является гармоническим колебанием. Однако при сложении колебаний с близкими частотами ($|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$) на малом промежутке времени колебания можно считать приблизительно когерентными. Колебания происходят с циклической частотой $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, а их амплитуда периодически (с периодом $2\pi/\Delta\omega$) изменяется от $A_{max} = A_1 + A_2$ до $A_{min} = |A_2 - A_1|$.

Биения представляют собой один из примеров модулированных колебаний, т.е. колебаний, происходящих по закону гармонических колебаний (1), в котором один из параметров периодически изменяется со временем с периодом, значительно превышающим период основных колебаний. Различают амплитудную, частотную и фазовую модуляции.

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Пусть точка движется в плоскости таким образом, что ее координаты x, y совершает гармонические колебания. В этом случае говорят о сложении взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

При одинаковых частотах колебаний

$$x = a\cos(\omega t), \quad y = b\cos(\omega t + \delta)$$

траекторией точки является эллипс, вид которого зависит от амплитуд и разности фаз. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Разность фаз равна нулю $\delta = 0$. Тогда $y = (b/a)x$, то есть частица движется по прямой в первом и третьем квадрантах.

2) $\delta = \pi$, тогда $y = -(b/a)x$. Частица движется по прямой во втором и четвертом квадрантах.

3) $\delta = \pi/2$, тогда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то есть частица движется по эллипсу, полуоси которого совпадают с осями координат. Движение происходит по часовой стрелке.

4) $\delta = 3\pi/2$, это то же самое, что $\delta = -\pi/2$ - движение по эллипсу против часовой стрелки.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы и относятся как целые числа, то траектории движения являются замкнутыми фигурами, которые называют фигурами Лиссажу.

Затухающие колебания

Если в колебательной системе происходят потери энергии, то амплитуда колебаний уменьшается со временем. Будем исходить из основного уравнения динамики, предполагая, что на частицу массы *m* кроме квазиупругой силы $F_y = -kx$ действует сила сопротивления, пропорциональная скорости частицы $F_c = -r\upsilon_x = -r\dot{x}$. Тогда уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{8}$$

где $2\beta = r/m$, $\omega_0^2 = k/m$. Частоту ω_0 - называют собственной частотой осциллятора, а β - коэффициентом затухания.

Уравнение (8) при $\beta < \omega_0$ имеет решение

$$x(t) = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)\,, \tag{9}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота затухающих колебаний, а постоянные a и α определяются из начальных условий. Кривая $x(t)$, представляемая формулой (9), не периодична. Однако величина *x* периодически проходит через ноль и бесконечное число раз достигает максимума и минимума. В этом смысле процессы, описываемые этой формулой, являются колебательными. Они называются затухающими колебаниями. Величину $T = 2\pi/\omega$ называют периодом затухающих колебаний, а величину $A(t) = a_0 e^{-\beta t}$ –амплитудой затухающих колебаний. Она экспоненциально убывает во времени. На рис.2 приведены два графика затухающих колебаний. Для синей кривой коэффициент затухания больше, чем для красной.

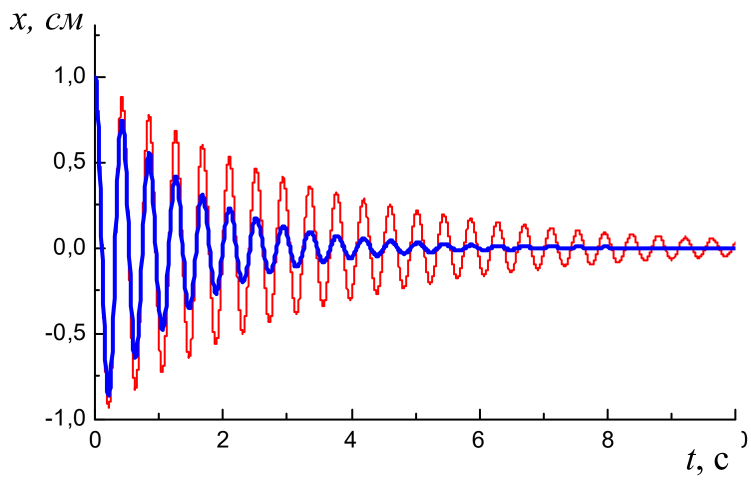


Рис.2. Затухающие колебания при двух различных коэффициентах затухания

Время $\tau = 1/\beta$, за которое амплитуда убывает в e раз, называется временем затухания. Обратная этому времени величина β называется коэффициентом затухания.

За период затухающих колебаний амплитуда убывает в $\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$ раз. Логарифм этого отношения

$$\lambda = \ln\frac{A(T)}{A(t+T)} = \beta T$$

называется логарифмическим декрементом затухания. На рис.3 приведены два графика затухающих колебаний при одинаковых коэффициентах затухания, но различных логарифмических декрементах затухания.

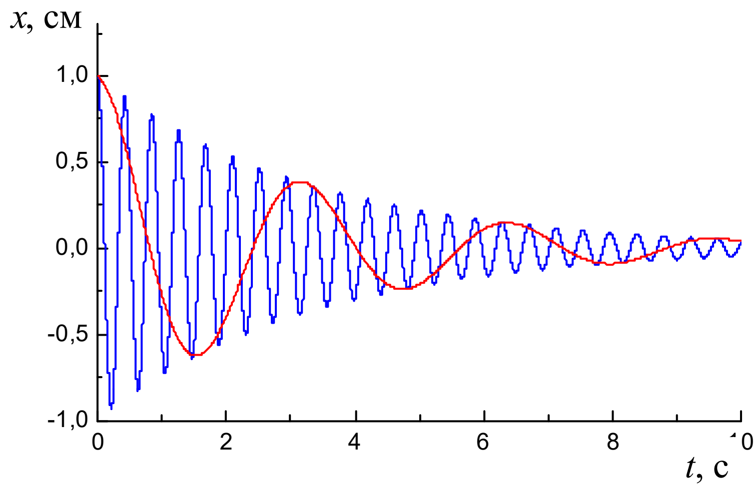


Рис.3. Затухающие колебания при двух различных логарифмических декрементах затухания

Вынужденные колебания

Движение системы под воздействием внешней периодической силы называют вынужденными колебаниями, саму внешнюю силу называют вынуждающей силой. В простейшем случае вынуждающая сила изменяется по закону

$$F_x = F_m \cos\omega t$$

Теперь на частицу действуют три силы: квазиупругая, сила сопротивления и вынуждающая сила:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_m \cos\omega t .$$

Перепишем это уравнение в более удобном виде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos\omega t . \qquad (1)$$

где $2\beta = r/m$, $\omega_0^2 = k/m$, $f_m = F_m/m$.

По истечении некоторого времени с момента начал действия вынуждающей силы в системе установятся гармонические колебания с частотой вынуждающей силы, но отстающие от нее по фазе:

$$x = a\cos(\omega t - \varphi) . \qquad (2)$$

Определим амплитуду вынужденных колебаний a и фазовый сдвиг φ.

Для этого найдем при помощи (2) производные $\dot{x}$ и $\ddot{x}$

$$\dot{x} = -a\omega\sin(\omega t - \varphi) = a\omega\cos(\omega t - \varphi + \pi/2) ,$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi) ,$$

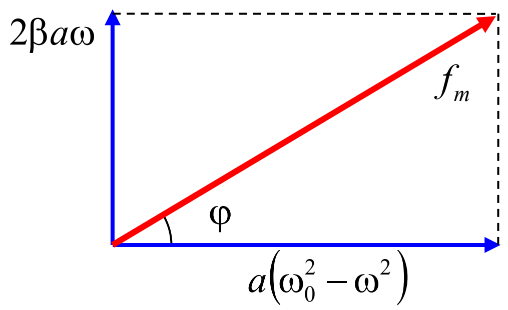
и подставим их в уравнение (1):

$$a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta a\omega\cos(\omega t - \varphi + \pi/2) + a\omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi) = f_m \cos\omega t ,$$

или

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) a\cos(\omega t - \varphi) + 2\beta a\omega\cos(\omega t - \varphi + \pi/2) = f_m \cos\omega t ,$$

Сложение колебаний проведем методом векторных диаграмм (рис.) .



Из этой диаграммы следует:

$$f_m^2 = a^2\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\beta\omega)^2\right]$$

и

$$a = \frac{f_m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} . \qquad (3)$$

Из диаграммы также получаем выражение для фазового сдвига

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (4)$$

Из формул (3), (4) видно, что амплитуда вынужденных колебаний и их фаза зависят от свойств самого осциллятора, а также от параметров вынуждающей силы.

<u>Резонанс.</u>

График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешнего воздействия ω (см. рис.) при $\beta << \omega_0$ содержит резкий максимум при частоте $\omega_{рез}$. Такое резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний при их частоте близкой к частоте собственных колебаний, называют явлением резонанса. Частоту, при которой амплитуда достигает максимума, называют резонансной частотой. Ее можно найти из условия

$$\frac{d}{d\omega}\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right)=0\,.$$

После преобразований получим

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}\,. \qquad (5)$$

Амплитуда колебаний при резонансе получается из формул (3) и (5):

$$a_{\max}=a(\omega_{рез})=\frac{f_m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}\,.$$

Чем меньше коэффициент затухания β, тем более ярко выражен резонанс.

Зависимость фазового сдвига от частоты называется фазово-частотной характеристикой (рис.).