ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Решения некоторых задач

1. *Работа постоянной силы.*

4.4. Под действием постоянной силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ небольшое тело совершает перемещение из точки с радиус-вектором $\vec{r}_1 = -\vec{i} + 7\vec{j}$ в точку с радиус-вектором $\vec{r}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Вычислите работу этой силы.

Решение.

Работа постоянной силы определяется формулой

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = (3\vec{i} + 4\vec{j})(4\vec{i} - 3\vec{j}) = 0 .$$

Здесь учтено, что $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

2. *Работа переменной силы.*

4.7. Известно, что на небольшое тело массы m со стороны Земли массы M и радиуса R действует сила притяжения $G \cdot m \cdot M / x^2$ (причем $x > R$). Здесь x – расстояние от центра Земли до тела. С высоты $H = R$ из состояния покоя падает небольшое тело. Найдите работу силы притяжения на этом пути.

Решение.

Направим ось X от центра Земли вдоль ее радиуса. Тогда проекция силы притяжения на эту ось равна

$$F_x = -G\frac{mM}{x^2} .$$

Далее вычислим работу этой силы на пути от $x_1 = R + H = 2R$ до $x_2 = R$:

$$A = \int_{R+H}^{R} F_x dx = -\int_{R+H}^{R} G\frac{mM}{x^2} dx = G\frac{mM}{x}\bigg|_{2R}^{R} = GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = G\frac{mM}{2R}$$

3. *Мощность силы.*

4.9. Небольшое тело движется со скоростью $\vec{\upsilon} = 3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$. под действием силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 4t\vec{j}$. Вычислите мощность этой силы для момента t = 1 с

Решение.

По определению мощность силы равна

$$N = \frac{dA}{at} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}.$$

Подставляя в выражение для мощности $\vec{\upsilon}$ и $\vec{F}$, получим:

$$N = (3\vec{i} + 4t\vec{j})(3t\vec{i} + 2t^2\vec{j}) = 9t + 8t^3 = 17 \text{ Вт}.$$

4. *Теорема о приращении кинетической энергии.*

4.12. Пуля массы $m = 10$ г, перемещаясь практически горизонтально, пробивает доску. В результате ее скорость, равная в начале $\upsilon_1 = 400$ м/с, уменьшается в два раза. Вычислите работу силы сопротивления, которая действует на пулю в доске.

Решение.

Работа силы сопротивления равна изменению кинетической энергии:

$$A_{12} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = \frac{m(\upsilon_1/2)^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = -\frac{3}{8}m\upsilon_1^2 = \text{-600 Дж}.$$

5. *Потенциальная энергия взаимодействия системы материальных точек.*

4.18. Является ли сила $\vec{F} = ax\vec{i} - by\vec{j} + cz\vec{k}$ консервативной?

Решение.

Для консервативной силы должны выполняться условия

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}.$$

В данной задаче $F_x = ax$, $F_y = -by$, $F_z = cz$ и

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, сила является консервативной.

4.24. Известно, что на небольшое тело массы *m* со стороны Земли массы *M* и радиуса *R* действует сила притяжения $G{\cdot}m{\cdot}M/x^2$ (причем $x>R$). Здесь *x* – расстояние от центра Земли до тела. Найдите разность потенциальных энергий $U_2 - U_1$ взаимодействия тела, массой *m* и Земли в точках $x_2 = R + H$ и $x_1 = R$.

Решение.

По определению приращение потенциальной энергии равно

$$U_2 - U_1 = -A_{12},$$

где $A_{12} = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$ - работа консервативной сила на траектории от точки $\vec{r}_1$ до точки $\vec{r}_2$.

Работа консервативной силы не зависит от формы траектории, поэтому выберем траекторию в виде прямолинейного отрезка от $x_1 = R$ до $x_2 = R + H$. Тогда

$$\vec{F} d\vec{r} = -G \frac{mM}{x^2} dx,$$

$$A_{12} = -\int\limits_{R}^{R+H} G \frac{mM}{x^2} dx = G \frac{mM}{r}\Bigg|_{R}^{R+H} = GmM\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right) = -G\frac{mMH}{R(R+H)}$$

и

$$U_2 - U_1 = G\frac{mMH}{R(R+H)}.$$

4.29. Потенциальная энергия взаимодействия частицы с внешним силовым полем равна $U(r) = \frac{A}{r} = A \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}$. Здесь A – постоянная величина. Найдите проекции F_x, F_y, F_z силы, действующей на эту частицу, а также модуль силы F.

Решение.

Проекции консервативной силы на координатные оси определяются формулами

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

В нашей задаче:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + x^2}}\right) = \frac{Ax}{\left(x^2 + y^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{Ax}{r^3},$$

аналогично:

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{Ay}{r^3}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{Az}{r^3}.$$

Далее вычисляем модуль силы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \frac{A}{r^2}.$$

6. Изменение механической энергии.

4.35. Тело массы $m =$ 1 кг брошено вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. Высота подъема тела оказалась равной $h = 4$ м. Найдите работу $A_{\text{сопр}}$ силы сопротивления воздуха.

Решение.

По теореме об изменении механической энергии

$$E_2 - E_1 = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дисс}},$$

где $E_1 = m\upsilon_0^2/2$ - механическая энергия тела в точке старта, $E_2 = mgh$ - механическая энергия в верхней точке траектории, $A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}^{\text{дисс}} = A_{\text{сопр}}$ - работа внешних и внутренних диссипативных сил. Получаем:

$$A_{\text{сопр}} = mgh - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \text{-10 Дж.}$$

4.40. Небольшое тело массы *2m* налетает на покоившееся небольшое тело массы *m*. Происходит абсолютно неупругий удар. Найдите относительное приращение кинетической энергии этой системы тел.

Решение.

Считая систему замкнутой, запишем закон сохранения импульса:

$$2m\upsilon_0 = (2m + m)\upsilon,$$

где υ_0 - начальная скорость тела массы $2m$, υ - скорость тел после неупругого соударения. Отсюда следует $\upsilon/\upsilon_0 = 2/3$.

Найдем относительное приращение кинетической энергии системы:

$$\delta T = \frac{(3m\upsilon^2/2) - (2m\upsilon_0^2/2)}{(2m\upsilon_0^2/2)} = \frac{3}{2}\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)^2 - 1 = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

7. *Сохранение механической энергии.*

4.52. В результате абсолютно упругого центрального столкновения частицы 1 массы m_1 с покоившейся частицей 2 обе частицы разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми по величине скоростями. Найдите массу m_2 частицы 2.

Решение.

Система замкнутая, поэтому воспользуемся законом сохранения импульса:

$$m_1\upsilon_0 = m_1\upsilon - m_2\upsilon,$$

где υ - скорости частиц после столкновения. Так как удар упругий, запишем закон сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1\upsilon_0^2}{2} = \frac{m_1\upsilon^2}{2} + \frac{m_2\upsilon^2}{2}.$$

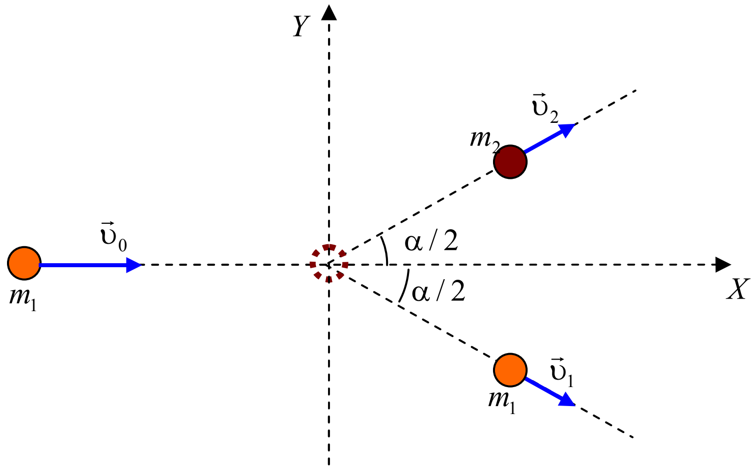
Из этой системы уравнений получим $m_2 = 3m_1$.

4.53. В результате абсолютно упругого столкновения частицы 1 с покоившейся частицей 2 обе частицы разлетелись симметрично относительно первоначального направления движения частицы 1, и угол между их направлениями разлета оказался равным $\alpha = 600$. Найдите отношение массы m_1 частицы 1 к массе m_2 частицы 2.

Решение.

Запишем закон сохранения импульса для проекций на координатные оси X и Y (см. рис.):

$$\begin{cases} m_1\upsilon_0 = m_1\upsilon_1\cos(\alpha/2) + m_2\upsilon_2\cos(\alpha/2) \\ 0 = m_2\upsilon_2\sin(\alpha/2) - m_1\upsilon_1\sin(\alpha/2) \end{cases},$$



Из этих уравнений следует:

$$\begin{cases} \upsilon_0 = 2\upsilon_1\cos(\alpha/2) \\ \upsilon_2 = m_1\upsilon_1/m_2 \end{cases}.$$

Механическая энергия при упругом ударе сохраняется:

$$\frac{m_1\upsilon_0^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}.$$

Подставляя в это уравнение полученные выше выражения для υ_0 и υ_2, после преобразований получим ответ:

$$\frac{m_1}{m_2} = 4\cos^2(\alpha/2) - 1 = 2.$$

8. Собственная кинетическая энергия системы материальных точек.

4.61. Два шарика массой $m = 100$ г каждый движутся относительно лаборатории со скоростями $\upsilon_1 = 10$ м/с и $\upsilon_2 = 20$ м/с соответственно. В некоторый момент времени скорости шариков сонаправлены и лежат на прямой, проходящей через шарики. Вычислите собственную кинетическую энергию $\widetilde{T}$ системы шариков.

Решение.

По теореме Кенига

$$T = \widetilde{T} + \frac{M\upsilon_c^2}{2},$$

где

$$T = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_2^2}{2}$$

-кинетическая энергия системы в лабораторной системе отсчета, $M = 2m$ - масса системы, υ_c - скорость центра масс, которую можно найти из уравнения:

$$m\upsilon_1 + m\upsilon_2 = M\upsilon_c .$$

Поэтому:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_2^2}{2} = \widetilde{T} + \frac{2m}{2}\left(\frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}\right)^2 .$$

После преобразований получим:

$$\widetilde{T} = \frac{m(\upsilon_2 - \upsilon_1)^2}{4} = 2{,}5 \text{ Дж.}$$