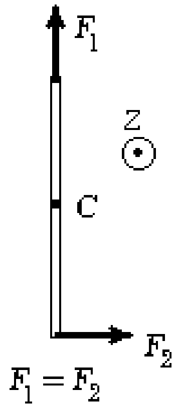
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Решения некоторых задач

1. Уравнение движения центра масс твердого тела

6.1 На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится однородный стержень длины l и массы m. В некоторый момент времени к стержню прикладывают горизонтальные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как показано на рис. Найдите для этого момента времени: 1) угол α, который составляет со стержнем вектор $\vec{a}_c$ ускорения центра масс стержня; 2) модуль вектора $\vec{a}_c$.



Решение

Воспользуемся теоремой о движении центра масс:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Отсюда получим для проекций векторных величин на оси X (перепендикулярна стержню) и Y (направлена вдоль стержня):

$$ma_{cx} = F_2,$$

$$ma_{cy} = F_1.$$

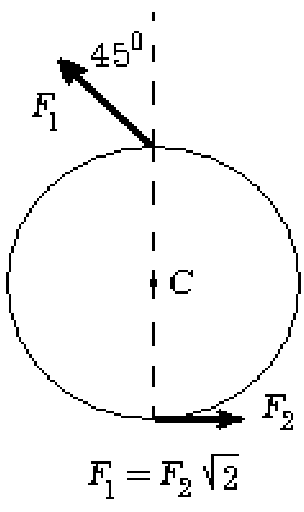
Следовательно,

$$\text{tg}\alpha = \frac{F_1}{F_2} = 1, \qquad \alpha = 45^0,$$

$$|a_c| = \sqrt{a_{cx}^2 + a_{cy}^2} = \frac{1}{m}\sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \frac{F_1\sqrt{2}}{m}.$$

2. Уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

6.54 На гладкой горизонтальной поверхности стола находится однородный диск радиуса R и массы m, который может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси C, проходящей через центр диска. В некоторый момент времени к диску прикладывают горизонтальные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как показано на рис. Найдите для этого момента времени величину и направление вектора $\vec{\beta}$ углового ускорения диска.



Решение

Запишем уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

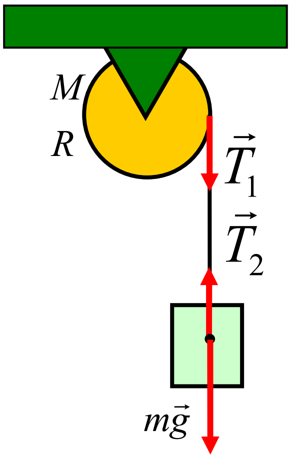
$$I\beta = M,$$

где $I = mR^2/2$ - момент инерции диска, $M = F_1 R\sin\alpha + F_2 R$ - суммарный момент исл относительно оси вращения. Следовательно

$$\beta = \frac{F_1 R \sin\alpha + F_2 R}{(mR^2/2)}.$$

Учитывая, что $\alpha = \pi/4$ и $F_1 = F_2\sqrt{2}$, получим $\beta = 4F_2/mR$. Вектор $\vec{\beta}$ направлен к читателю.

Найдите ускорение груза массой m, прикрепленного к концу легкой нерастяжимой нити, намотанной на блок массы M (рис.). Трением в оси блока пренебречь, считать его сплошным цилиндром радиуса R.



Решение

Груз движется вниз с ускорением $\vec{a}$ под действием сил тяжести и натяжения нити:

$$ma = mg - T_2,$$

А блок раскручивается с угловым ускорением β под действием момента силы натяжения нити

$$I\beta = T_1 R,$$

где

$$I = MR^2/2.$$

Поскольку нить невесомая, то

$$T_1 = T_2.$$

Так как нить нерастяжимая, то

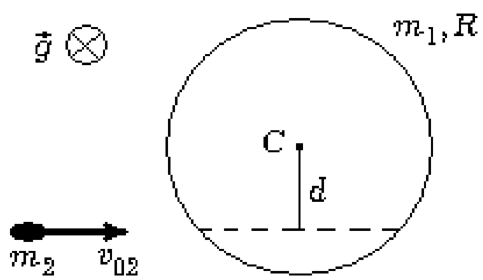
$$a = \beta R.$$

После простых преобразований получим ответ:

$$a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}.$$

3. Сохранение момента импульса системы твердых тел

6.79 Однородный цилиндр радиуса R и массы m_1 может вращаться без трения вокруг закрепленной вертикальной оси, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости рис. Пуля массы m_2, летящая горизонтально со скоростью $\vec{v}_{02}$ попадает в боковую поверхность цилиндра, останавливается (см. рис.) и падает вниз. Найдите величину ω угловой скорости, которую получит цилиндр. Прицельное расстояние d считайте заданным.



Решение

Момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю, поэтому момент импульса системы «цилиндр+пуля» остается постоянным. До попадания пули в цилиндр момент импульса этой системы равен $L = m_2 \upsilon_{02} d$, а после остановки пули момент импульса цилиндра, вращающегося с угловой скоростью ω, равен $L = I\omega$, где $I = m_1 R^2 / 2$. Из уравнения

$$m_2 \upsilon_{02} d = \frac{\omega m_1 R^2}{2}$$

найдем угловую скорость

$$\omega = \frac{2 m_2 \upsilon_{02} d}{m_1 R^2}.$$

4. Кинетическая энергия твердого тела вращающегося воруг неподвижной оси

6.104 Вычислите кинетическую энергию тонкого проволочного кольца, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Масса кольца, его радиус и угловая скорость равны соответственно 0,1 кг; 0,1 м; 200 рад/с.

Решение

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется формулой

$$E_k = I\frac{\omega^2}{2}.$$

Момент инерции кольца вокруг указанной оси равен

$$I = mR^2.$$

Следовательно,

$$E_k = \frac{mR^2\omega^2}{2} = 20 \text{ Дж}.$$

5. Сохранение момента импульса и кинетическая энергия системы тел

6.106 Однородный горизонтальный диск массы $m_1 = 0{,}5$ кг и радиуса $R = 0{,}4$ м раскрутили до угловой скорости $\omega_1 = 10 \cdot \sqrt{7}$ рад/с вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. На диск положили однородный стержень массы $m_2 = 1$ кг длиной $l = 0{,}8$ м так, что его середина совпала с центром диска. Стержень сразу приклеился к диску. Вычислите величину конечной кинетической энергии системы диск – стержень.

Решение

Момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю, поэтому момент импульса системы «диск-стержень» остается постоянным. В начальный момент времени диск вращается с угловой скоростью ω_1, стержень покоится, суммарный момент импульса системы равен

$$L = I_1\omega_1,$$

где $I_1 = \dfrac{m_1 R^2}{2}$ - момент инерции диска. После того, как стержень приклеился к диску, диск и стержень вращаются как единое целое с угловой скоростью ω_2, и момент импульса системы равен

$$L = (I_1 + I_2)\omega_2,$$

где $I_2 = m_2 l^2 / 12$ - момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его середину. Из закона сохранения момента импульса

$$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega_2$$

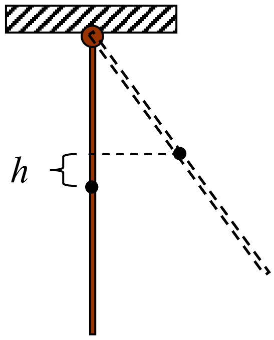
найдем угловую скорость ω_2 и конечную кинетическую энергию

$$E_2 = (I_1 + I_2)\omega_2^2 / 2 .$$

После преобразований получим

$$E_2 = \frac{I_1^2 \omega_1^2}{2(I_1 + I_2)} = \frac{3(m_1 R^2 \omega_1)^2}{2(6 m_1 R^2 + m_2 l^2)} = 6 \text{ Дж}.$$

6. Закон сохранения механической энергии



6.118 Однородный стержень длины $l = 0{,}6$ м может вращаться без трения в вертикальной плоскости в поле сил тяжести (g = 10 м/с^2) вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. Когда стержень находился в устойчивом равновесном положении, ему сообщили начальную угловую скорость $\omega = 5$ рад/с. Вычислите максимальную высоту, на которую поднимется центр масс стержня.

Решение

Запишем закон сохранения механической энергии:

$$\frac{I\omega^2}{2} = mgh ,$$

где $I = ml^2 / 3$ - момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через его конец. Из этого уравнения найдем

$$h = \frac{\omega^2 l^2}{6g} = 0{,}15 \text{ м}$$