

Неинерциальные системы отсчета

Основное уравнение динамики $m\vec{a} = \vec{F}$ справедливо в инерциальных системах отсчета (ИСО). Однако его можно «приспособить» и для решения задач в неинерциальных системах отсчета (НСО). Для этого вводятся в рассмотрение силы инерции.

Сила инерции при поступательном ускоренном движении системы отсчета

Пусть НСО движется поступательно с ускорением \vec{a}_K относительно ИСО. В этом случае ускорение материальной точки относительно ИСО \vec{a} и ускорение точки относительно НСО $\vec{a}_{\text{отн}}$ связаны соотношением

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_K.$$

Второй закон Ньютона перепишем в виде:

$$\begin{aligned} m\vec{a} = \sum \vec{F}_j &\Rightarrow m(\vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_K) = \sum \vec{F}_j \Rightarrow \\ m\vec{a}_{\text{отн}} &= \sum \vec{F}_j - m\vec{a}_K. \end{aligned}$$

Назовем силой инерции величину

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_K, \quad (1)$$

тогда уравнение динамики примет обычный вид

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \sum \vec{F}_j + \vec{F}_{\text{ин}}.$$

В правой части закона динамики кроме сил взаимодействия фигурирует сила инерции, зависящая от движения самой системы отсчета (от ее ускорения). Заметим, что в данном случае сила инерции, как и сила тяжести, пропорциональна массе тела. Поэтому она эквивалентна дополнительной силе тяжести.

Пример 1. Вес в лифте. Найти вес тела в лифте, который поднимается с ускорением $a_n = g/2$.

Решение. Перейдем в НСО, связанную с лифтом. В этой системе отсчета на тело действуют силы тяжести, сила реакции опоры и сила инерции. Под действием этих сил тело покоится:

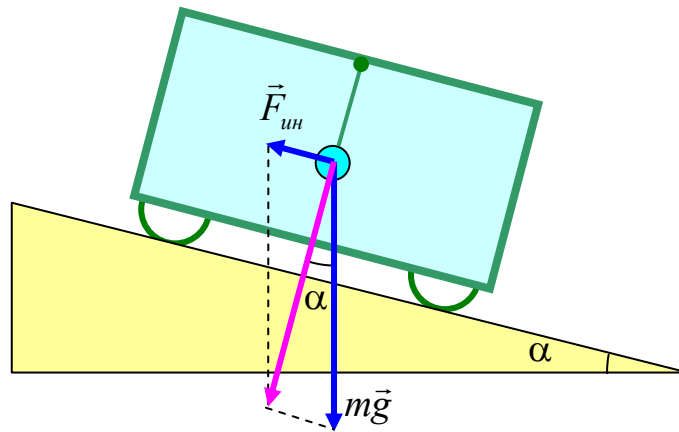
$$0 = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}_n \Rightarrow 0 = -mg + N - ma_n.$$

Поэтому $P = N = m(g + a_n) = (3/2)mg$. Человек стал в полтора раза тяжелее и, находясь в лифте, никакими способами не может определить, что происходит: лифт движется с ускорением или возросла сила тяжести.

Пример 2. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, без трения катится вагон, в котором подвешен математический маятник. Какой угол составляет нить маятника с вертикалью в положении равновесия? Чему равен период колебаний маятника?

Решение. В отсутствие трения вагон движется по наклонной плоскости с ускорением $a = g \sin \alpha$. Перейдем в НСО, связанную с вагоном. На маятник кроме сил тяжести и натяжения нити (на рис. не показана) действует сила инерции $F_{\text{ин}} = ma = mg \sin \alpha$, направленная против вектора ускорения вагона. Видно, что результирующая сила $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ин}}$ направлена перпендикулярно наклонной плоскости – это направление эффективной вертикали в НСО. Таким образом, наблюдатель внутри вагона обнаружит уменьшение «силы тяжести»:

$g \rightarrow g \cos \alpha$. В частности период колебаний маятника станет равным $2\pi\sqrt{l/g \cos \alpha}$.



Принцип эквивалентности сил инерции и сил тяготения был положен Эйнштейном в основу общей теории относительности, которая является релятивистской теорией гравитации и объясняет возникновение гравитационных сил искривлением пространства-времени в присутствии внешних масс.

Центробежная сила инерции. Пусть система отсчета равномерно вращающаяся относительно ИСО. В этом случае ускорения точки в ИСО и в НСО связаны некоторым соотношением, которое будет получено ниже. Обозначим разность этих ускорений

$$\vec{a}^* = \vec{a} - \vec{a}_{\text{омн}}$$

и перепишем второй закон Ньютона в виде:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \sum \vec{F}_j \Rightarrow m(\vec{a}_{\text{омн}} + \vec{a}^*) = \sum \vec{F}_j \Rightarrow \\ m\vec{a}_{\text{омн}} &= \sum \vec{F}_j - m\vec{a}^* \Rightarrow \\ m\vec{a}_{\text{омн}} &= \sum \vec{F}_j + \vec{F}_{\text{ин}} \end{aligned}$$

где

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}^* = -m(\vec{a} - \vec{a}_{\text{омн}}) \quad (2)$$

-сила инерции, зависящая от характера движения НСО, положения и скорости материальной точки в НСО.

Рассмотрим сначала случай, когда материальная точка неподвижна относительно вращающейся НСО:

$$\vec{a}_{\text{омн}} = 0.$$

В ИСО такая точка движется равномерно по окружности с ускорением:

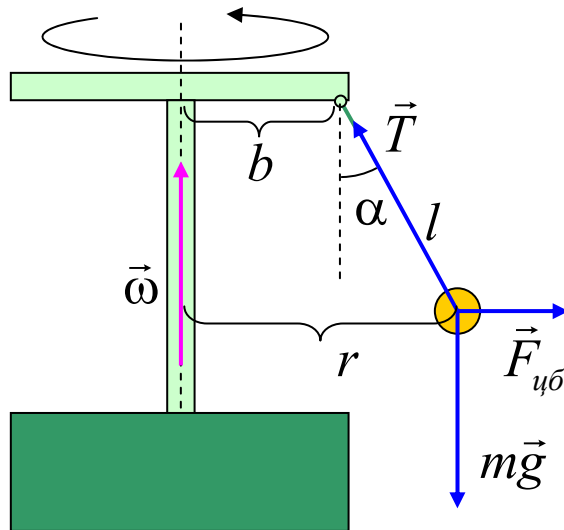
$$\vec{a} = \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} = [\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}]].$$

Следовательно

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m(\vec{a} - \vec{a}_{\text{омн}}) = -m\vec{a} = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}]] = m\omega^2 \vec{r} \quad (3)$$

Эту силу называют центробежной силой инерции.

Пример 3. Отвес на карусели. На карусели, вращающейся с постоянной угловой скоростью, подвешен на легкой нити длины l на расстоянии b от оси шарик массы m . Нить отклонена от вертикали на угол α . Найти угловую скорость ω .



Решение. В НСО, вращающейся вместе с каруселью, на шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} и центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{r}$. При этом шарик покоится:

$$0 = m\omega^2 r - T \sin \alpha,$$

$$0 = T \cos \alpha - mg,$$

$$r = b + l \sin \alpha.$$

Из этих уравнений найдем

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{b \cos \alpha + l \sin \alpha}}$$

Если материальная точка движется относительно вращающейся НСО, то кроме центробежной силы инерции возникает сила инерции, называемая силой Кориолиса:

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор} = 2m[\vec{v}_{отн} \vec{\omega}] + m\omega^2\vec{r}, \quad (4)$$

где $\vec{v}_{отн}$ скорость точки относительно вращающейся системы отсчета. Формулу для силы Кориолиса выведем позже.

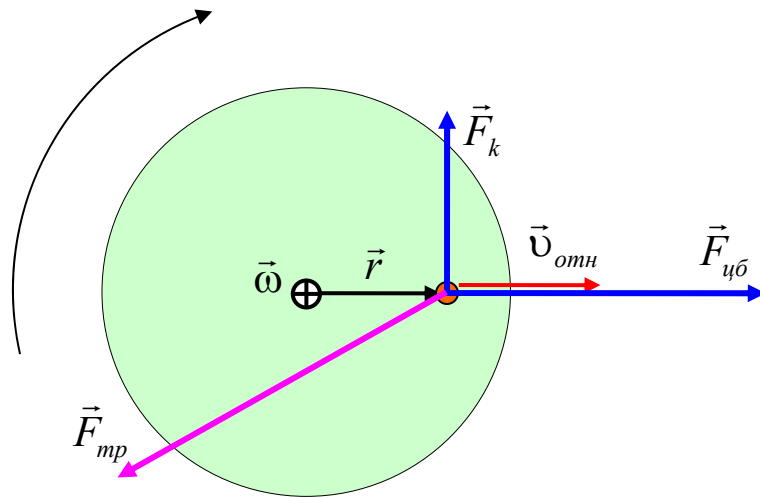
Сила Кориолиса направлена перпендикулярно скорости. В северном полушарии для движения вдоль поверхности горизонтальная составляющая силы Кориолиса направлена вправо, что проявляется в образовании циклонов, размывании правого берега рек и др.

Пример 4. Человек идет вдоль радиуса вращающейся платформы с постоянной скоростью $\vec{v}_{отн} = 1$ м/с относительно платформы. Найдем центробежную и кориолисову силы инерции на расстоянии $r = 2$ м от оси вращения. Угловая скорость платформы $\omega = 2$ рад/с.

Решение. На рисунке указаны векторы угловой скорости, скорости человека относительно платформы, силы Кориолиса $F_k = 2m[\vec{v}_{отн} \vec{\omega}]$ и центробежной силы инерции $\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{r}$. Вычисляем:

$$\frac{F_k}{mg} = \frac{2v_{омн}\omega}{g} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{10} = 0,4,$$

$$\frac{F_{цб}}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{2^2 \cdot 2}{10} = 0,8.$$



Вывод формулы для силы Кориолиса

Возьмем начала отсчета в ИСО и НСО в произвольной точке O на оси вращения. Тогда $\vec{r} = \vec{r}_{омн}$. Наша задача найти $\vec{a}^* = \vec{a} - \vec{a}_{омн} = \vec{a}$, так как $\vec{a}_{омн} = 0$. Вычисляем:

1) Выведено ранее:

$$\vec{v} = \vec{v}_{омн} + [\vec{\omega}\vec{r}]. \quad (5)$$

2) Дифференцируем:

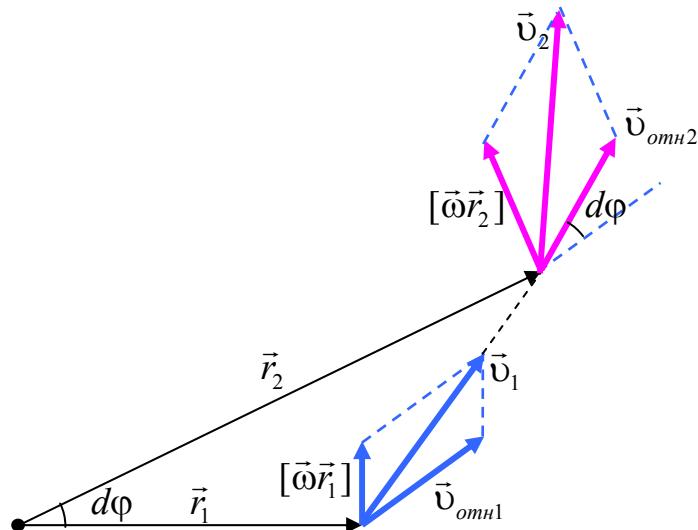
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{омн}}{dt} + \left[\vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right]. \quad (6)$$

3) По определению:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}_{омн} + [\vec{\omega}\vec{r}].$$

4) На рисунке ниже изображен вектор скорости $\vec{v}_1 = \vec{v}_{омн1} + [\vec{\omega}\vec{r}_1]$ в момент времени t . Через время dt материальная точка в ИСО сместится в направлении вектора \vec{v}_1 , при этом вектор относительной скорости повернется на угол $d\varphi$. Поэтому

$$\frac{d\vec{v}_{омн}}{dt} = \frac{\vec{v}_{омн2} - \vec{v}_{омн1}}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{[d\varphi, \vec{v}_{омн}]}{dt} = [\vec{\omega}\vec{v}_{омн}].$$



5) Подставляем в (6):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_{omn}}{dt} + \left[\vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\omega} \vec{v}_{omn}] + [\omega [\vec{v}_{omn} + [\vec{\omega} \vec{r}]]] = 2[\vec{\omega} \vec{v}_{omn}] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]].$$

Нетрудно показать, что если в НСО точка движется с ускорением \vec{a}_{omn} , то

$$\vec{a} = \vec{a}_{omn} + 2[\vec{\omega} \vec{v}_{omn}] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]].$$

Для силы инерции получаем

$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}^* = -m(\vec{a} - \vec{a}_{omn}) = 2m[\vec{v}_{omn} \vec{\omega}] + m\omega^2 \vec{r}.$$

Итак, сила инерции представляет собой сумму двух членов, первый из которых называют силой Кориолиса, а второй — центробежной силой:

$$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор} = 2m[\vec{v}_{omn} \vec{\omega}] + m\omega^2 \vec{r} \quad (7)$$

1) Скатывание тележки с отвесом с наклонной плоскости. 3:54

<http://www.youtube.com/watch?v=NIQmc4ukf-4>

2) Отвесы на вращающейся платформе. 3:28

<http://www.youtube.com/watch?v=ZP9rIifyLbY>

3) «Устойчивая цепь»: Круговая цепочка. 4:38

<http://www.youtube.com/watch?v=Zyc3coKW8Tg>

4) Бумажная пила: Резка дерева бумажным диском. 1:11

<http://www.youtube.com/watch?v=FBky553KDuE>

5) Сила Кориолиса: Шарик, катящийся по вращающейся платформе. 5:10

<http://www.youtube.com/watch?v=LkrmALM8TsA>

6) Выстрел на вращающейся платформе. 2:17

<http://www.youtube.com/watch?v=PksReUC-wA8>

7) Модель маятника Фуко. 1:30 <http://www.youtube.com/watch?v=AUfbvtdbeMM>

8) Сила Кориолиса http://www.youtube.com/watch?v=dt_XJp77-mk 3 мин