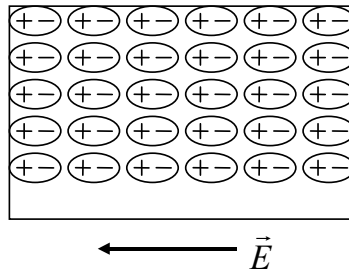


1.10. Поляризация диэлектриков

1. Связанные заряды

Заряды в диэлектрике под действием поля могут смещаться из своих положений равновесия лишь на малые расстояния, порядка атомных. Диэлектрик состоит из электрически нейтральных молекул и под действием приложенного электрического поля «центр тяжести» электронов в молекуле немного смещается относительно «центра тяжести» атомных ядер. Молекулы становятся электрическими диполями, ориентированными в направлении поля \vec{E} . В этом случае говорят, что диэлектрик *поляризован*.



Видно, что на одном конце параллелепипеда из диэлектрика выступают нескомпенсированные положительные заряды, а на противоположном конце - отрицательные поверхностные заряды. Их называют *поляризационными* или *связанными* зарядами. Очевидно, что связанные заряды нельзя разделить механически (в отличие от индуцированных зарядов в проводниках).

Некомпенсированные заряды, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика, называют *связанными* или *поляризационными*. Связанные заряды входят в состав нейтральных молекул и атомов. Заметим, что связанные заряды могут возникать не только на поверхности, но и в объеме диэлектрика.

Механизм поляризации диэлектриков может быть и иным. Существуют диэлектрики, молекулы которых обладают дипольными моментами уже в отсутствие электрического поля. Такие молекулы называются *полярными*. Если поля нет, то полярные молекулы совершают хаотические тепловые движения и ориентированы совершенно беспорядочно. При наложении электрического поля дипольные молекулы ориентируются преимущественно в направлении поля. Это и означает, что диэлектрик становится поляризованным.

Конечно, приведенный выше рисунок очень упрощенно отображает поляризацию диэлектрика. В действительности тепловые колебания приводят к случайному «разбросу» ориентации отдельных молекул и поляризация сводится к некоторому небольшому упорядочиванию на этом случайном фоне: в направлении поля суммарный дипольный момент молекул несколько больше, чем в иных направлениях.

2. Сторонние заряды

Помимо электрически нейтральных молекул в диэлектрике могут существовать положительно или отрицательно заряженные ионы. Такие заряды называются *сторонними*. Они возникают в диэлектрике, например, при электризации трением. К сторонним зарядам относятся также все заряды, находящиеся на проводниках.

Разделение зарядов на связанные и сторонние важно для описания поля в диэлектриках.

3. Трудности расчета поля

Электрическое поле в диэлектрике определяется как сторонними, так и связанными зарядами, причем величина и распределение связанных зарядов изначально не известны, а са-

ми зависят от результирующего электрического поля. Это значительно усложняет расчет поля в диэлектриках. В частности, теорема Гаусса для вектора \vec{E}

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{q_{\text{стор}} + q_{\text{связ}}}{\epsilon_0}$$

содержит в правой части связанный заряд, который сам нуждается в определении. Эти трудности решаются далее путем введения новых величин и установления новых связей.

4. Вектор поляризации

Для количественного описания поляризации вводят в рассмотрение вектор поляризации. Так называется дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}.$$

Вектор поляризации - локальная характеристика поляризованного диэлектрика (также как, например, объемная плотность заряда - локальная характеристика заряженного тела).

Вектор \vec{P} зависит от напряженности электрического поля \vec{E} . Опыт показывает, что для обширного класса диэлектриков и широкого класса явлений связь между векторами \vec{P} и \vec{E} линейная. Такая закономерность объясняется тем, что напряженности макроскопических электрических полей обычно малы по сравнению с напряженностями микрополей внутри атомов и молекул. Если среда изотропна, то векторы \vec{P} и \vec{E} коллинеарны и можно записать

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1)$$

где α - безразмерный коэффициент, называемый *поляризуемостью (диэлектрической восприимчивостью)* диэлектрика. Он зависит от типа диэлектрика.

5. Теорема Гаусса для вектора \vec{P}

Поток вектора поляризации \vec{P} через произвольную замкнутую поверхность равен взятому с обратным знаком связанному заряду диэлектрика в объеме, который охватывается поверхностью S , то есть

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q_{\text{связ}}. \quad (2)$$

Доказательство этой теоремы приведем позже.

6. Вектор электрического смещения (вектор \vec{D}). Теорема Гаусса для вектора \vec{D}

Для расчета поля в диэлектрике введем вспомогательный вектор \vec{D} . По определению

$$\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}. \quad (3)$$

Учитывая, что в изотропном диэлектрике $\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$, получим

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (3a)$$

где $\epsilon = \alpha + 1$ - диэлектрическая проницаемость, зависящая от свойств диэлектрика. Для вакуума $\alpha = 0$ и $\epsilon = 1$.

Для вектора \vec{D} справедлива теорема Гаусса

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{стор}}, \quad (4)$$

где S – произвольная замкнутая поверхность, $q_{\text{стор}}$ – *сторонний* заряд, охватываемый этой поверхностью.

Доказательство: Поток вектора \vec{D} через произвольную замкнутую поверхность равен

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S \vec{P} d\vec{S} + \epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{S} = -q_{\text{связ}} + \epsilon_0 \frac{(q_{\text{стор}} + q_{\text{связ}})}{\epsilon_0} = q_{\text{стор}}.$$

То обстоятельство, что в это уравнение (4) не входят связанные заряды, плотность которых обычно не известна, позволяет использовать это уравнение для определения вектора \vec{D} . Вектор напряженности поля затем рассчитывается с использованием формулы (3а). Конкретное исполнение этого алгоритма обычно довольно сложное и требует компьютерных расчетов. Но некоторые задачи решаются просто.

Пример 1. Поле однородно заряженной сферы в диэлектрической среде.

Пример 2. Поле внутри и вне диэлектрического однородно заряженного шара.

1.11. Условия на границе раздела двух диэлектриков

Найдем условия, которым должны удовлетворять векторы \vec{E} и \vec{D} на границе раздела двух диэлектриков. Величины, характеризующие поле в первой среде, будем отмечать индексом 1, во второй среде – индексом 2.

Возьмем цилиндр, основания которого расположены по разные стороны от границы раздела. Высота цилиндра бесконечно мала по сравнению с линейными размерами его основания (рис.). Если вблизи границы раздела отсутствуют *сторонние* заряды, то поток вектора \vec{D} через выбранную поверхность равен нулю. Но этот поток можно представить в виде суммы потоков через основания цилиндра и его боковую поверхность. Поток через боковую поверхность бесконечно мал (т.к. высота цилиндра бесконечно мала). Сумма потоков через основания цилиндра равна

$$\Phi_{\text{осн}} = (D_{2n} - D_{1n})\Delta S,$$

где D_{1n} и D_{2n} проекции векторов $\vec{D}_{1,2}$ на направление нормали к границе раздела. Таким образом, если на границе раздела двух диэлектриков нет сторонних зарядов (связанные заряды могут быть), то

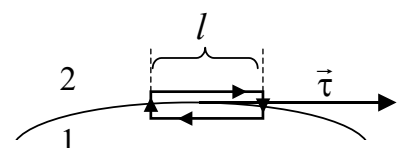
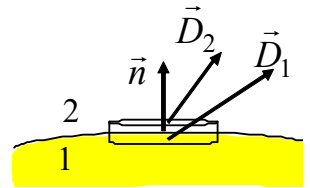
$$D_{2n} - D_{1n} = 0. \quad (8)$$

Следовательно, нормальная компонента вектора \vec{D} на границе раздела меняется непрерывно. Из выражения (8) следует

$$\epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n},$$

то есть нормальная компонента вектора напряженности претерпевает скачок на границе раздела двух диэлектриков в ϵ_2 / ϵ_1 раз.

Рассмотрим теперь изменение на границе раздела касательных составляющих векторов \vec{E} и \vec{D} . Пусть вблизи гра-



ницы раздела в диэлектрике 1 поле равно \vec{E}_1 , а в диэлектрике 2 - \vec{E}_2 . Возьмем небольшой вытянутый прямоугольный контур (рис.). Стороны контура, параллельные границе раздела, достаточно малы, так, что в их пределах поле \vec{E} в каждом диэлектрике практически не изменяется. "Высота" контура считается очень малой. Тогда согласно теореме о циркуляции вектора \vec{E}

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = E_{2\tau} l \cos 0 + E_{1\tau} l \cos \pi = l(E_{2\tau} - E_{1\tau}) = 0.$$

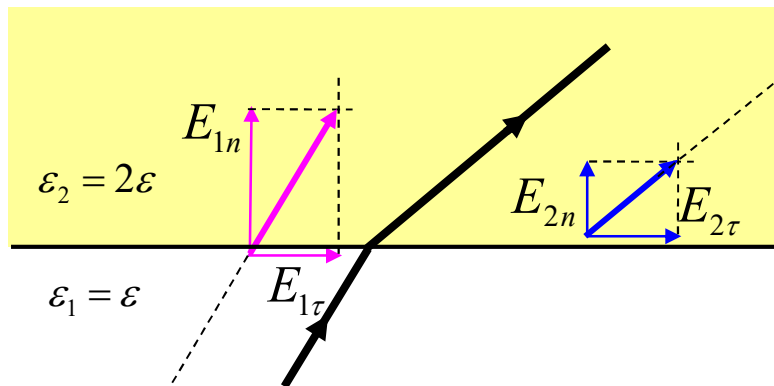
Следовательно,

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}, \quad (9)$$

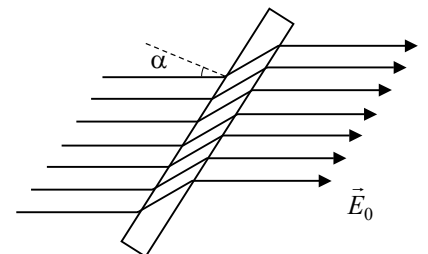
то есть тангенциальная составляющая вектора \vec{E} оказывается одинаковой по обе стороны границы раздела (не претерпевает скачка). Из (9) следует

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}.$$

Пример 1. Преломление силовых линий на границе раздела двух диэлектриков с $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$. Построим векторы напряженности в первом и втором диэлектриках вблизи границы раздела, учитывая, что $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$ и $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Силовые линии (линии поля \vec{E}) вблизи границы раздела параллельны вектору \vec{E}_1 в первом диэлектрике и параллельны вектору \vec{E}_2 во втором диэлектрике.



Пример 2. Пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε помещена в однородное электрическое поле так, что ее нормаль составляет угол α с напряженностью этого поля \vec{E}_0 (рис.). Найдите модуль E вектора напряженности поля внутри пластины вдали от ее краев.

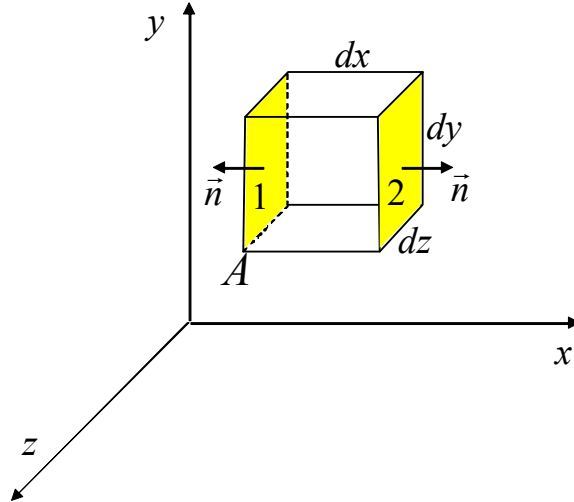


1.12. Теорема Гаусса в дифференциальной форме.

Пусть электрический заряд распределен в пространстве с объемной плотностью

$$\rho = \frac{dq}{dV}.$$

Рассмотрим в этом пространстве бесконечно малый прямоугольный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz , параллельными осям прямоугольной системы координат. Вершина A имеет координаты (x, y, z) .



На грани 1 внешняя нормаль направлена против оси x . Поэтому поток вектора напряженности через эту поверхность равен

$$\Phi_1 = -E_x(x)dydz.$$

Поток через противоположную грань 2 равен

$$\Phi_2 = E_x(x + dx)dydz.$$

Сумма обоих потоков будет

$$\Phi_1 + \Phi_2 = [E_x(x + dx) - E_x(x)]dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV,$$

где $dV = dx dy dz$ - объем параллелепипеда. Аналогично можно определить потоки через две пары остальных граней. Полный поток через всю замкнутую поверхность согласно теореме Гаусса равен заряду внутри этой поверхности, деленному на электрическую постоянную:

$$\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0}.$$

Итак, теорему Гаусса можно записать в дифференциальной форме

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}, \quad (10)$$

где введено обозначение

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Эта величина называется дивергенцией вектора \vec{E} . С дивергенцией вектора (не обязательно вектора напряженности) приходится встречаться в самых разных вопросах математики и физики, чем и оправдывается введение этого математического понятия.

Формулу (4) можно получить иначе, воспользовавшись математической теоремой Остроградского-Гаусса. В 1830-1831 годах великие математики Карл Фридрих Гаусс и Ми-

хаил Васильевич Остроградский доказали теорему, справедливую для произвольного векторного поля, которая сводит интеграл по замкнутой поверхности S к интегралу по объему V , который ограничен этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV.$$

С помощью этой теоремы легко получается дифференциальная форма теоремы Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Поскольку поверхность S и охватываемый ею объем V произвольны, то $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

С помощью теоремы Остроградского-Гаусса можно записать в дифференциальном виде теоремы Гаусса для векторов \vec{P} и \vec{D} :

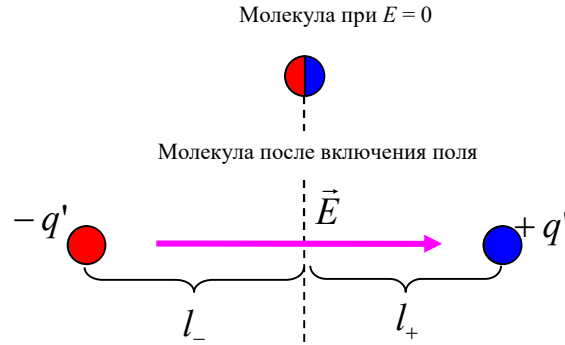
$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{стор}} + q_{\text{связ}}}{\varepsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{связ}} + \rho_{\text{стор}}}{\varepsilon_0}$
$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q_{\text{связ}}$	$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{связ}}$
$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{стор}}$	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{стор}}$

При помощи дифференциальных соотношений легко получить связь объемной плотности стороннего и связанного заряда в однородном диэлектрике. Если $\varepsilon = \text{const}$, то

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{связ}} + \rho_{\text{стор}}}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho_{\text{стор}} \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{связ}} = -\rho_{\text{стор}} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (11)$$

Приложение. Доказательство теоремы Гаусса для вектора \vec{P}

1) Рассмотрим нейтральную неполяризованную молекулу. При включении электрического поля \vec{E} молекула поляризуется. Это можно представить, как смещение некоторого связанного положительного заряда q' в направлении поля \vec{E} на расстояние l_+ и смещение такого же отрицательного заряда $-q'$ на l_- в противоположном направлении. В результате образуется диполь с моментом $|\vec{p}| = q'(l_+ + l_-)$.



Дипольный момент некоторого объема диэлектрика ΔV равен

$$\Delta p = q'(l_+ + l_-)\Delta N,$$

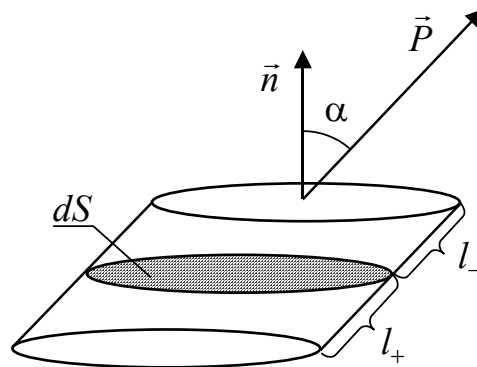
где ΔN - число молекул в этом объеме. Модуль вектора поляризации равен

$$|\vec{P}| = \frac{q'(l_+ + l_-)\Delta N}{\Delta V} = q'n(l_+ + l_-),$$

где n – концентрация молекул.

2) Рассмотрим малую площадку dS внутри диэлектрика. При включении внешнего электрического поля диэлектрик поляризуется – положительные заряды смещаются относительно отрицательных. Найдем заряд, который проходит, через элемент dS в направлении нормали \vec{n} к площадке.

Пусть при включении внешнего поля \vec{E} положительные заряды смещаются вдоль поля (вдоль вектора поляризации) на расстояние l_+ , а отрицательные заряды смещаются в противоположном направлении на l_- .



Через элемент поверхности dS в результате поляризации пройдет положительный заряд

$$dq'_+ = q'n l_+ dS \cos \alpha,$$

заключенный внутри косоуго цилиндра. Кроме того, через элемент dS в противоположном направлении пройдет отрицательный заряд величиной

$$|dq'_-| = q'n l_- dS \cos \alpha.$$

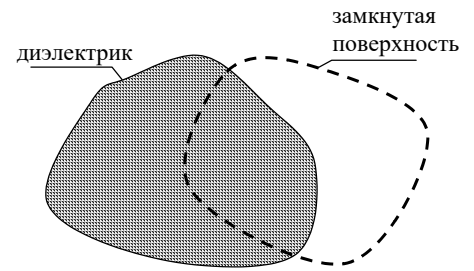
В результате при поляризации диэлектрика в направлении вектора \vec{P} через площадку dS прошел заряд

$$dq' = (dq'_+ + |dq'_-|) = q'n(l_+ + l_-)dS \cos \alpha.$$

Но $q'n(l_+ + l_-) = P$. Поэтому при поляризации в направлении нормали через нее пройдет связанный заряд

$$dq' = \vec{P} d\vec{S}.$$

3) Рассмотрим теперь произвольную замкнутую поверхность S , которая охватывает часть диэлектрика. Пусть \vec{n} внешняя нормаль к поверхности. Когда внешнее поле отсутствует, и диэлектрик не поляризован, суммарный связанный заряд внутри поверхности S равен нулю. При включении поля и поляризации диэлектрика через поверхность S из заключенного в ней объема выйдет связанный заряд величиной



$$\Delta q' = \oint_S \vec{P} d\vec{S}.$$

При этом, очевидно, связанный заряд внутри поверхности S станет равным $q' = -\Delta q'$. Следовательно, $\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q'_{\text{внутр}} = -q_{\text{связ}}$. Теорема доказана.

1.13. Общая задача электростатики

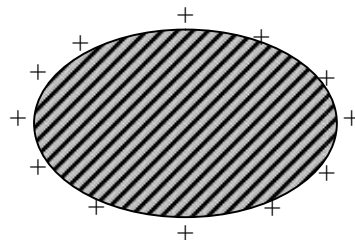
Вектор напряженности электрического поля неподвижного точечного заряда вычисляется по формуле

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\vec{r}}{r^3}, \quad (12)$$

Используя принцип суперпозиции, нетрудно вычислить напряженность поля, созданного несколькими точечными зарядами. Если заряды распределены в пространстве непрерывно *по известному закону*, то для вычисления поля необходимо провести суммирование бесконечно малых величин - векторов напряженности, которые создаются бесконечно малыми порциями заряда.

Однако реальные задачи, которые приходится решать в электростатике, гораздо сложнее. Дело в том, что распределение заряда в объеме и на поверхности тел не бывает известным заранее, а само подлежит определению.

Пусть, например, требуется найти напряженность поля уединенного проводника произвольной формы, заряд которого Q . Воспользоваться формулой (12) и принципом суперпозиции для расчета электрического поля напрямую не удастся, поскольку не известна поверхностная плотность заряда в различных точках поверхности проводника. Заряд по поверхности распределен неравномерно и только в простейшем случае, когда проводник является шаром, поверхностная плотность заряда одинакова во всех точках поверхности.



1. Полный заряд проводника Q .
2. Неизвестно по какому закону этот заряд распределен по поверхности проводника.
3. Поэтому не удастся рассчитать поле, пользуясь принципом суперпозиции и законом Кулона.

Еще более сложной становится задача расчета полей при наличии диэлектриков. В электрическом поле происходит поляризация диэлектриков и наряду со сторонними заряда-

ми необходимо учитывать и связанные (поляризационные заряды). Не рассматривая пока явления, связанные с поляризацией диэлектриков, сформулируем общую задачу электростатики в вакууме следующим образом.

Заданы расположение в пространстве (в вакууме) и форма одного или нескольких проводящих тел. Кроме того, известны заряды или потенциалы этих проводников. Требуется определить напряженность электрического поля во всех точках пространства и распределение заряда по поверхности проводников.

Запишем теорему Гаусса в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

и условие потенциальности

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Получим

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

следовательно

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}. \quad (13)$$

Это уравнение называется уравнением Пуассона. При отсутствии свободных зарядов оно переходит в уравнение Лапласа

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0}. \quad (14)$$

Это уравнение позволяет, по крайней мере, численно, рассчитывать электрическое поле произвольной системы заряженных проводников, если заданы их форма, расположение и потенциалы (или заряды).

В теории доказывается, что указанная эта задача имеет единственное решение. Поэтому, если нам каким либо способом удалось найти функцию $\varphi(\vec{r})$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям, то можно утверждать, что это решение правильное и единственное.

Заметим, что дивергенцию и градиент можно представить единым образом через дифференциальный оператор «набла»:

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Так

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi \quad (\text{произведение вектора «набла» на скаляр } \varphi)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \vec{E} \quad (\text{скалярное произведение вектора «набла» на вектор } \vec{E})$$

При наличии диэлектриков общая задача сводится к решению системы уравнений

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{своб}},$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},$$

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

при соответствующих граничных условиях.

Еще раз заметим, что уравнения (13), (14) выводятся из теоремы Гаусса и условия потенциальности электростатического поля. Таким образом, значение теоремы Гаусса не ограничивается возможностью решения с ее помощью нескольких частных задач электростатики. И роль потенциала не сводится только к возможности простого расчета с его помощью работы сил поля. *Теорема Гаусса и условие потенциальности электростатического поля приводят к дифференциальному уравнению, на основе которого решаются любые задачи электростатики.*

1.14. Метод изображений.

Рассмотрим эквипотенциальные поверхности поля двух равных и разноименных зарядов. Одной из таких поверхностей является плоскость симметрии, ее потенциал $\varphi = 0$ (рис.1). Остальные поверхности являются замкнутыми, но не сферическими. Если взять любые две эквипотенциальные поверхности и заполнить их проводником, сохранив значения потенциалов, то поле вне проводников не изменится.

Возьмем в качестве одной эквипотенциальной поверхности плоскость симметрии (ее потенциал равен нулю), а в качестве второй – сферическую поверхность очень малого радиуса, охватывающую заряд q . Мы приходим к выводу, что точечный заряд q , расположенный около бесконечной проводящей плоскости создают такое же поле, как два заряда q и $-q$, расположенные зеркально симметрично относительно плоскости.

Таким образом, мы знаем решение весьма непростой задачи: вблизи бесконечно проводящей плоскости находится заряд q . Этот заряд индуцирует на плоскости заряды противоположного знака. Требуется найти суммарное электрическое поле заряда q и индуцированных зарядов, а также распределение индуцированных зарядов по плоскости.

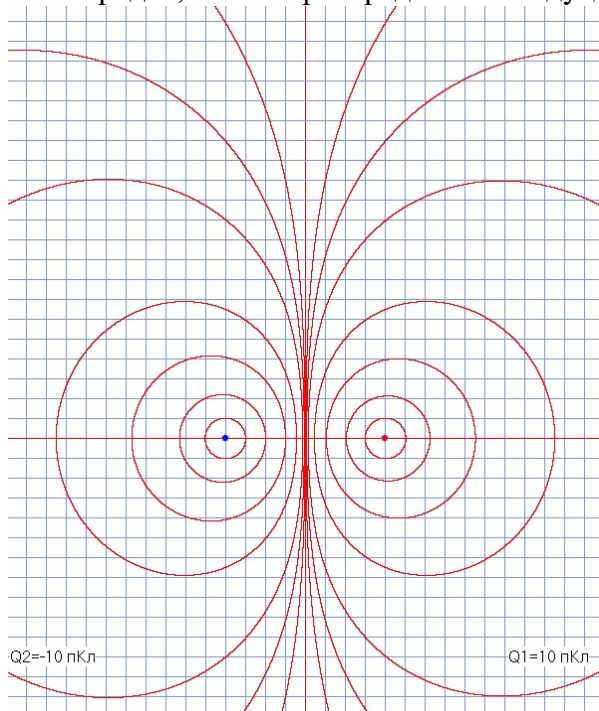


Рис.1

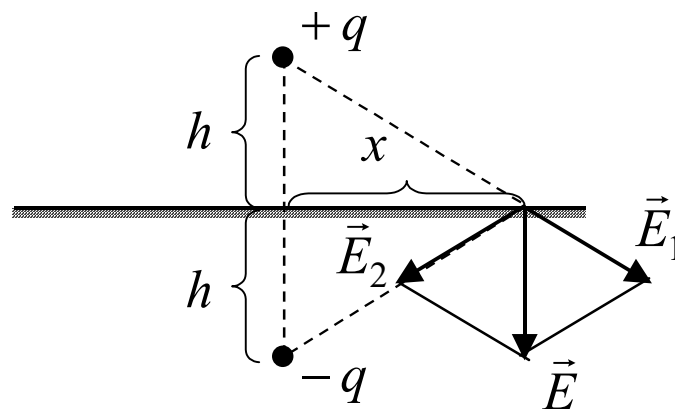


Рис.2

Решение этой задачи нам известно: суммарное поле будет таким же, как суммарное поле заряда q и фиктивного заряда $-q$, расположенного зеркально симметрично относительно проводящей плоскости. Заряд $-q$ по существу «заменяет» все индуцированные заряды. Вблизи проводящей плоскости суммарное поле равно (рис.2)

$$E = \frac{2kqh}{(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Теперь можно найти поверхностную плотность заряда:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Поверхностная плотность максимальна при $x = 0$ и убывает с ростом x .

Итак, в рассматриваемом случае поле отлично от нуля только в верхнем полупространстве, и для вычисления этого поля достаточно ввести фиктивный заряд-изображение $q' = -q$, поместив его по другую сторону проводящей плоскости на таком же расстоянии, что заряд q . Фиктивный заряд создает в верхнем полупространстве такое же поле, как и индуцированные заряды на плоскости. Именно это подразумевают, когда говорят, что фиктивный заряд заменяет собой «действие» всех индуцированных зарядов. Надо только иметь в виду, что действие фиктивного заряда распространяется лишь на то полупространство, в котором находится действительный заряд q . В другом полупространстве поле отсутствует.

