

3. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Закон изменения импульса для одной материальной точки.

Второй закон Ньютона для материальной точки, когда на нее действует постоянная сила, может быть переписан в виде закона изменения импульса

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{F} \cdot \Delta t$$

- приращение импульса материальной точки равно импульсу силы (произведению силы на время, за которое импульс точки изменился на $\Delta \vec{p}$), действующей на материальную точку.

3.1. Величина импульса материальной точки равна 100 кг·м/с. Под действием постоянной силы направление вектора импульса изменяется на противоположное за две секунды. Вычислите величину силы.

3.2. Величина импульса материальной точки равна 100 кг·м/с. Под действием постоянной силы за время 1,4 секунды вектор импульса повернулся на 90° . Вычислите величину силы.

Система материальных точек.

Импульс системы материальных точек – это сумма (конечно векторная) импульсов материальных точек:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i .$$

Производная импульса системы материальных точек по времени равна сумме всех сил, действующих на систему, и, с учетом третьего закона Ньютона, равна сумме внешних сил, действующих на систему материальных точек:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i .$$

3.3. В лабораторной системе отсчета модули импульсов двух материальных точек равны 3 кг·м/с и 4 кг·м/с. Направления импульсов составляют прямой угол. Вычислите модуль импульса системы этих материальных точек в лабораторной системе отсчета.

3.4. Система состоит из двух тел. Известны зависимости от времени импульсов этих тел $\vec{p}_1 = (2t + 3)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{p}_2 = -2t\vec{i} + t\vec{j}$. Сохраняется ли импульс системы ?

3.5. Система состоит из двух тел. Известны зависимости от времени импульсов этих тел $\vec{p}_1 = (2t + 3)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{p}_2 = -2t\vec{i} + t\vec{j}$. Сохраняются ли какие - либо проекции импульса системы на оси координат?

3.6. Система состоит из двух тел. Известны зависимости от времени импульсов этих тел $\vec{p}_1 = (2t + 3)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{p}_2 = -2t\vec{i} + t\vec{j}$. Найдите сумму внешних сил, приложенных к телам, и вычислите ее величину для $t = 1/6$ с.

Из закона изменения импульса $d\vec{P} = \sum \vec{F}_i \cdot dt$ следует, что если $\sum \vec{F}_i \cdot dt = 0$, то $\vec{P} = const$.

Для проекций на выделенное направление X можно утверждать, что из $dP_x = \sum F_x \cdot dt$ следует $P_x = const$, если $\sum F_x \cdot dt = 0$.

- 3.7.** Платформа движется по горизонтальным рельсам в положительном направлении координатной оси X со скоростью 1м/с. Человек, масса которого равна массе платформы, находится на платформе и сначала покоится относительно нее. Затем человек разгоняется и покидает платформу со скоростью 2м/с относительно платформы в положительном направлении координатной оси X . Вычислите скорость пустой платформы.
- 3.8.** Платформа движется по горизонтальным рельсам в положительном направлении координатной оси X со скоростью 1м/с. Человек, масса которого равна массе платформы, находится на платформе и сначала покоится относительно нее. Затем человек разгоняется и покидает платформу со скоростью 2м/с относительно платформы в отрицательном направлении координатной оси X . Вычислите скорость пустой платформы.
- 3.9.** Платформа движется по горизонтальным рельсам в положительном направлении координатной оси X со скоростью 1м/с. Человек, масса которого равна массе платформы, находится на платформе и сначала покоится относительно нее. Затем человек разгоняется и покидает платформу с горизонтальной скоростью 2м/с относительно платформы в направлении перпендикулярном координатной оси X . Вычислите скорость пустой платформы.
- 3.10.** Тележка с песком движется по горизонтальным прямолинейным рельсам со скоростью 10 м/с. В дне тележки образовалась дыра, песок стал высыпаться, и через некоторое время масса тележки с песком уменьшилась в два раза. Вычислите скорость тележки для этого момента времени. Трением о рельсы и сопротивлением воздуха пренебречь.
- 3.11.** Пустая тележка движется по горизонтальным прямолинейным рельсам со скоростью 10 м/с. По ходу движения тележки, над рельсами на достаточной высоте закреплен бункер с песком. В момент прохождения тележки под бункером из него в тележку высыпался песок, масса которого равна массе пустой тележки. Вычислите конечную скорость тележки. Трением о рельсы и сопротивлением воздуха пренебречь.
- 3.12.** На покоившейся тележке массы M стояли два человека одинаковой массы m . Затем они покинули тележку, разогнавшись вдоль рельсов до скорости \vec{V}' относительно тележки, один раз одновременно, другой раз последовательно друг за другом. В каком случае скорость тележки будет больше и во сколько раз?

Уравнение движения тела с изменяющейся массой – уравнение Мещерского.

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{u} \cdot \frac{dm}{dt}$$

m – масса, \vec{a} – ускорение тела в рассматриваемый момент времени, \vec{F} – сумма всех внешних сил, $\left(\vec{u} \cdot \frac{dm}{dt} \right)$ – реактивная сила.

- 3.13.** Допустим, что каждую секунду из ракеты вылетает 100 кг отработанного топлива со скоростью 500 м/с (относительно ракеты). Вычислите величину силы, действующей на ракету со стороны вылетающего топлива.
- 3.14.** Допустим, что скорость, с которой вылетает из ракеты топливо (в системе отсчета «ракета»), равна 500 м/с. Ракета стартует с нулевой начальной скоростью в отсутствие внешних сил. Вычислите величину скорости ракеты в момент, когда масса ракеты уменьшится приблизительно в 2,7 раза по сравнению со стартовой.
- 3.15.** Стартовая масса двухступенчатой ракеты равна $M = 25,5$ т. Масса корпуса первой ступени равна $m_{01} = 2$ т, масса топлива в ней $m_1 = 20$ т. После сжигания 20т топлива первая ступень отбрасывается и включается вторая ступень. Скорость истечения топлива в системе отсчета «ракета» равна $u = 1$ км/с. Найдите скорость v_1 ракеты в момент отделения первой ступени.

3.16. Стартовая масса двухступенчатой ракеты равна $M = 25,5$ т. Масса корпуса первой ступени равна $m_{01} = 2$ т, масса топлива в ней $m_1 = 20$ т. Масса корпуса второй ступени равна $m_{02} = 0,5$ т, масса топлива в ней $m_2 = 3$ т. После сжигания 20 т топлива первая ступень отбрасывается и включается вторая ступень. Скорость истечения топлива в системе отсчета “ракета” равна $u = 1$ км/с. Найдите скорость v_2 ракеты после использования всего топлива.

3.17. Стартовая масса одноступенчатой ракеты равна $M = 25,5$ т. Масса корпуса равна $m_0 = 2,5$ т, масса топлива $m = 23$ т. Скорость истечения топлива в системе отсчета “ракета” равна $u = 1$ км/с. Найдите скорость v ракеты после использования всего топлива. Результат вычислений сравните с ответом в предыдущей задаче.

Центр масс. Система отсчета центра масс.

Центром масс системы материальных точек называется точка пространства, радиус-вектор которой находится по формуле

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i}.$$

Соответственно скорость центра масс равна

$$\vec{V} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum m_i}.$$

Системой отсчета центра масс (Ц-системой) называется такая система отсчета, относительно которой покоится центр масс рассматриваемой системы частиц и, которая движется поступательно относительно инерциальной системы отсчета.

3.18. Две материальные точки одинаковой массы движутся со скоростями 3 м/с и 4 м/с во взаимно перпендикулярных направлениях. Вычислите модуль скорости V центра масс системы этих точек.

3.19. В лабораторной системе отсчета модули импульсов двух материальных точек равны 3 кг·м/с и 4 кг·м/с. Направления импульсов составляют прямой угол. Вычислите модуль импульса P системы этих материальных точек в лабораторной системе отсчета.

3.20. В лабораторной системе отсчета модули импульсов двух материальных точек одинаковы и равны 4 кг·м/с. Векторы импульсов сонаправлены и лежат на прямой, проходящей через обе материальные точки. Вычислите модуль импульса \vec{P} системы этих материальных точек в системе отсчета центра масс.

3.21. В лабораторной системе отсчета модули импульсов двух материальных точек одинаковы и равны 2 кг·м/с. Векторы импульсов противоположны и лежат на прямой, проходящей через обе материальные точки. Вычислите модуль импульса \vec{P} системы этих материальных точек в системе отсчета центра масс.

3.22. В лабораторной системе отсчета модули импульсов двух материальных точек равны 2 кг·м/с и 5 кг·м/с соответственно. Векторы импульсов противоположны и лежат на прямой, проходящей через обе материальные точки. Вычислите модуль импульса \vec{P} системы этих материальных точек в системе отсчета центра масс.

3.23. В лабораторной системе отсчета модули импульсов двух материальных точек равны 3 кг·м/с и 4 кг·м/с. Направления импульсов составляют прямой угол. Вычислите модуль импульса \vec{P} системы этих материальных точек в системе отсчета центра масс.

Использование Ц-системы отсчета для представления движения системы материальных точек в виде суммы движения системы точек как целого и внутреннего движения.

- 3.24.** Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, сонаправлены и равны соответственно v и $3v$. Найдите величину F силы натяжения нити.
- 3.25.** Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, противоположно направлены и равны соответственно v и $3v$. Найдите величину F силы натяжения нити.
- 3.26.** Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, сонаправлены и равны соответственно $3v$ и $5v$. Найдите величину F силы натяжения нити.
- 3.27.** Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, противоположно направлены и равны соответственно $3v$ и $5v$. Найдите величину F силы натяжения нити.
- 3.28.** Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, сонаправлены и равны соответственно $2v$ и $4v$. Найдите величину F силы натяжения нити.
- 3.29.** Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, противоположно направлены и равны соответственно $2v$ и $4v$. Найдите величину F силы натяжения нити.
- 3.30.** Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, сонаправлены и равны соответственно $4v$ и $6v$. Найдите величину F силы натяжения нити.
- 3.31.** Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, противоположно направлены и равны соответственно $4v$ и $6v$. Найдите величину F силы натяжения нити.
- 3.32.** Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, сонаправлены и равны соответственно $v/2$ и $5v/2$. Найдите величину F силы натяжения нити.
- 3.33.** Две небольшие одинаковые шайбы массой m каждая, связаны нерастяжимой нитью длины l и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости шайб перпендикулярны нити, противоположно направлены и равны соответственно $v/2$ и $5v/2$. Найдите величину F силы натяжения нити.

Ответы

3.1 $F = 100 \text{ Н.}$

3.2 $F = 100 \text{ Н.}$

3.3 $P = 5 \text{ кг}\cdot\text{м/с.}$

3.4 Нет.

3.5 Сохраняются на X и Y.

3.6 $\vec{F} = (6t + 1) \cdot \vec{j} ;$

- $F = 2 \text{ Н.}$
- 3.7 $v = 0.$
- 3.8 $v = 2 \text{ м/с.}$
- 3.9 $v = 1 \text{ м/с.}$
- 3.10 $v = 10 \text{ м/с.}$
- 3.11 $v = 5 \text{ м/с.}$
- 3.12 Одновременно $v_1 = \frac{2m}{M+2m} \cdot v';$
 последовательно $v_2 = \frac{2m}{M+m} \cdot v';$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M+2m}{M+m}.$$
- 3.13 $F_{\text{давления}} = u \cdot \left| \frac{dm}{dt} \right| = 50 \text{ кН.}$
- 3.14 $v = u \cdot \ln(2,7) = u.$
- 3.15 $v_1 = u \cdot \ln\left(\frac{M}{M-m_1}\right) \approx 1,5 \text{ км/ч.}$
- 3.16 $v_2 = u \cdot \ln\left(\frac{M}{M-m_1} \cdot \frac{M-(m_{01}+m_1)}{M-(m_{01}+m_1+m_2)}\right) \approx 3,5 \text{ км/с.}$
- 3.17 $v = u \cdot \ln\left(\frac{M}{m_0}\right) \approx 2,3 \text{ км/с.}$
- 3.18 $V = 2,5 \text{ м/с.}$
- 3.19 $P = 5 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$
- 3.20 $\dot{P} = 0.$
- 3.21 $\ddot{P} = 0.$
- 3.22 $\ddot{P} = 0.$
- 3.23 $\dot{P} = 0.$
- 3.24 $F = \frac{2mv^2}{l}.$
- 3.25 $F = \frac{8mv^2}{l}.$
- 3.26 $F = \frac{2mv^2}{l}.$
- 3.27 $F = \frac{32mv^2}{l}.$
- 3.28 $F = \frac{2mv^2}{l}.$
- 3.29 $F = \frac{18mv^2}{l}.$

$$3.30 \quad F = \frac{2mv^2}{l}.$$

$$3.31 \quad F = \frac{50mv^2}{l}.$$

$$3.32 \quad F = \frac{2mv^2}{l}.$$

$$3.33 \quad F = \frac{9}{2} \cdot \frac{mv^2}{l}.$$