Релятивистская динамика

Специальная теория относительности установила фундаментальные свойства пространства-времени. Преобразования Лоренца позволяют определять пространственные и временные координаты любого события по отношению к разным инерциальным системам отсчета. Относительность одновременности, сокращение длины, замедление времени – важнейшие следствия теории относительности. Они надежно подтверждены экспериментально. При малых (по сравнению со скоростью света) скоростях преобразования Лоренца сводятся к преобразованиям Галилея и релятивистские эффекты становятся несущественными.

Основные законы динамики должны согласовываться с постулатами СТО: 1) основные законы механики должны быть ковариантными, то есть иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета, 2) никакое силовое воздействие не должно разогнать частицу до скорости, превышающей скорость света в вакууме. Кроме того, при малых скоростях релятивистские законы динамики должны переходить в законы классической механики.

Нет оснований считать, что релятивистская динамика должна опираться на меньшее число постулатов (основных законов), чем классическая механика. Поэтому имеет смысл ее строить по «классической схеме».

Первый закон Ньютона остается в силе. Он постулирует существование инерциальных систем отсчета.

Основное уравнение релятивистской динамики

Второй закон Ньютона нужно пересмотреть. Согласно этому закону сила может разогнать частицу до сколь угодно большой скорости. Это противоречит постулату СТО.

Опыт показывает, что второй закон Ньютона в релятивистском случае имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}\right)=\vec{F}\,. \tag{1}$$

где $\vec{\upsilon}$ - скорость частицы (материальной точки), m - ее масса – не зависящая от скорости и выбора инерциальной системы отсчета характеристика частицы.

Величину

$$\vec{P}=\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \tag{2}$$

называют релятивистским импульсом частицы. Тогда второй закон Ньютона приобретает формально такой же вид, что и в классической механике

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}\,. \tag{3}$$

Этот закон и его следствия тщательно проверены экспериментально (например, это можно сделать в ускорителе заряженных частиц).

Замечание-1. Уравнение (1) не допускает движения со скоростью большей скорости света.

Пример-1: Прямолинейное движение частицы под действием постоянной силы.

Заданы масса m частицы, постоянная сила F. Необходимо найти зависимость скорости υ частицы в зависимости от времени t. В начальный момент времени частица покоится в данной инерциальной СО.

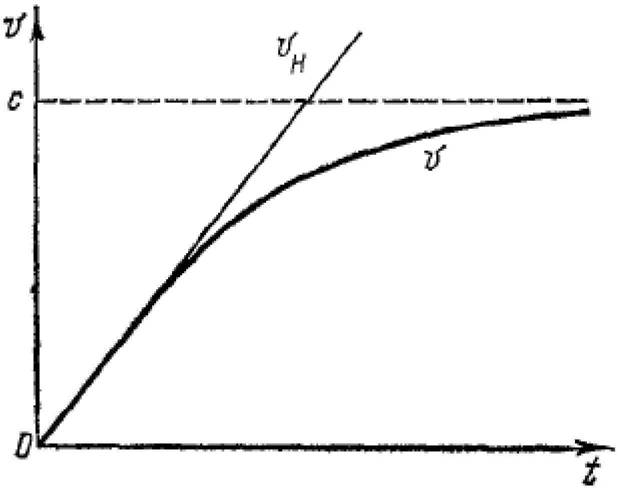
Решение: Интегрируя уравнение (3), получим

$$P - P(0) = Ft\,.$$

Так как $\upsilon(0) = 0$, то

$$\frac{m\upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = Ft \quad \text{и} \qquad \upsilon = \frac{Ft}{m\sqrt{1+(Ft/mc)^2}}\,.$$

При $Ft/mc << 1$ получаем классический результат, при $Ft/mc >> 1$ получаем $\upsilon \to c$ (см. рис.)



Замечание-2. Уравнение (1) справедливо во всех инерциальных системах отсчета, однако сила не является инвариантной величиной: ее величина и направление в разных системах отсчета могут быть различными.

Релятивистский импульс

От третьего закон Ньютона в релятивистском случае нужно отказаться. Дело в том, что при рассмотрении взаимодействия тел на расстоянии нужно учитывать конечную скорость распространения взаимодействия, а третий закон Ньютона предполагает мгновенную передачу взаимодействий.

Однако при контактных взаимодействиях равенство сил «действия» и «противодействия» сохраняется. Воспользуемся этим при анализе процесса столкновения двух частиц, не взаимодействующих между собой на больших расстояниях.

На первую частицу со стороны второй во время столкновения действует сила

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{P}_1}{dt}\,.$$

На вторую частицу со стороны первой действует сила

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{P}_2}{dt}\,.$$

Учитывая, что $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, получим

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = 0\,.$$

Следовательно, релятивистский импульс системы частиц при столкновении (то есть при взаимодействии на малых расстояниях) сохраняется:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = const. \tag{4}$$

Многочисленные эксперименты показали, что закон сохранения релятивистского импульса выполняется не только при контактных взаимодействиях, но и при любых взаимодействиях (необходимо учитывать и импульс поля). Именно закон сохранения релятивистского импульса, а не третий закон Ньютона следует принять за постулат теории. Заметим, что закон сохранения импульса связан с однородностью пространства.

Закон сохранения импульса-энергии

Согласно постулату СТО закон сохранения импульса должен быть ковариантным, то есть должен выполняться во всех инерциальных системах отсчета. Проверим, так ли это. Сначала получим закон преобразования импульса при переходе от одной инерциальной СО к другой.

Закон преобразования импульса

Из преобразований Лоренца можно вывести закон преобразования релятивистского импульса при переходе из инерциальной *K*-СО в инерциальную *K*'-СО:

$$p_x' = \frac{p_x - \beta e}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad p_y' = p_y, \qquad p_z' = p_z, \qquad e' = \frac{e - \beta p_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{5}$$

Здесь введено обозначение

$$e = \frac{mc}{\sqrt{1-(\mathrm{v}/c)^2}},$$

$\beta = V/c$, υ – скорость частицы, V – скорость системы отсчета. Физический смысл величины e выяснится в дальнейшем.

Заметим, что полученные формулы отличаются от преобразований Лоренца для пространственных и временной координат заменой координат на проекции импульса, а времени на величину e.

<u>Вывод формул (5)</u>

1) Пусть частица движется со скоростью υ в *K*-СО. Рассмотрим два события 1 и 2 (например, рождение и распад частицы), происходящие с частицей в моменты времени t и $t + dt$. Время между этими событиями в *K*'-СО, движущейся вместе с частицей, равно $dt_0 = dt\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$. Эта величина есть собственное время между событиями. Если рассматривать движение частицы из разных инерциальных систем отсчета, то при переходе из одной системы отсчета в другую скорость частицы υ и время между событиями dt будут изменяться, но величина

$$dt_0 = dt\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$$

останется неизменной (инвариантной). В частности, при рассмотрении движения частицы из инерциальных СО *K* и *K*' получим

$$dt\sqrt{1-(\upsilon/c)^2} = dt'\sqrt{1-(\upsilon'/c)^2}.$$

2) Из преобразований координат и времени следует

$$dx = \frac{dx' + \beta d\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad d\tau = \frac{d\tau' + \beta dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{5a}$$

где $\tau = ct$, $\tau' = ct'$, $\beta = V/c$, V – скорость *K*'-СО относительно *K*-СО, направленная, как обычно, вдоль осей x и x'.

3) Умножим левые части этих выражений на величину $\dfrac{m}{dt\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$, а правые части на равную ей величину $\dfrac{m}{dt'\sqrt{1-(\upsilon'/c)^2}}$. Учтем, что

$$\frac{mdx}{dt\sqrt{1-(\upsilon'/c)^2}} = p_x, \qquad \frac{mdx'}{dt'\sqrt{1-(\upsilon'/c)^2}} = p_x'.$$

Обозначим

$$e = \frac{md\tau}{dt\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{mc}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}, \qquad e' = \frac{mc}{\sqrt{1-(\upsilon'/c)^2}}.$$

Тогда из формул (5а) следует

$$p_x = \frac{p_x' + \beta e'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad p_y = p_y', \qquad p_z = p_z', \qquad e = \frac{e' + \beta p_x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Обратные преобразования дают формулы (5).

Неупругое столкновение двух релятивистских частиц

Рассмотрим теперь абсолютно неупругое столкновение двух релятивистских частиц. Их импульс и величина e в K-СО:

до удара	$(p_{1x}+p_{2x},\; p_{1y}+p_{2y},\; p_{1z}+p_{2z},\; e_1+e_2)$.
после удара	$(P_x,\; P_y,\; P_z,\; e)$.

В этой системе отсчета выполняется закон сохранения импульса

$$p_{1x}+p_{2x} = P_x, \quad p_{1y}+p_{2y} = P_y, \quad p_{1z}+p_{2z} = P_z.$$

Переходя в систему отсчета K', которая движется со скоростью V в направлении оси x, получим, пользуясь формулами (5):

до удара:	$\left(\dfrac{p_{1x}-\beta e_1 + p_{2x}-\beta e_2}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad p_{1y}+p_{2y},\quad p_{1z}+p_{2z},\quad \dfrac{e_1-\beta p_{1x}+e_2-\beta p_{2x}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$.
после удара:	$\left(\dfrac{P_x-\beta e}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad P_y,\quad P_z,\quad \dfrac{e-\beta P_x}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$.

Отсюда видно, что в K' СО импульс сохраняться только при выполнении условия

$$e_1 + e_2 = e.$$

Итак, наряду с сохранением релятивистского импульса должна при ударе сохраняться и величина e. Причем закон сохранения e также является ковариантным: если он выполняется в K СО, то он выполняется и в K' СО, как видно из записанных выше формул:

$$e_1' + e_2' = \frac{e_1-\beta p_{1x}+e_2-\beta p_{2x}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad e' = \frac{e-\beta P_x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Видно, что

$$e_1'+e_2'=e'.$$

Остается выяснить физический смысл величины *e*. В классическом случае при неупругом столкновении частиц наряду с сохранением импульса сохраняется и полная энергия, включающая механическую и внутреннюю (тепловую) энергии. Размерность энергии имеет величина

$$\boxed{E = ec = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}}. \qquad (6)$$

Именно ее и нужно отождествить с полной энергией частицы. Так и будем ее называть в дальнейшем.

Таким образом, в релятивистской механике законы сохранения импульса и энергии в замкнутой системе всегда выполняются одновременно. Это с необходимостью вытекает из основного постулата теории относительности.

Когда сохраняется векторная величина (импульс, например), то речь идет о сохранении трех чисел – проекций вектора. В данном случае сохраняются сразу четыре числа. Можно говорить о сохранении четырехмерного вектора, проекциями которого являются три проекции импульса, и полная энергия. <u>Четырехмерные векторы, преобразующиеся как пространственно-временные координаты события</u>, являются основными математическими объектами в релятивистской механике.

Энергия покоя и кинетическая энергия

<u>**Энергия покоя.**</u> Если частица покоится в некоторой системе отсчета, то она обладает энергией

$$E_0 = mc^2. \qquad (7)$$

Эту энергию называют энергией покоя. Она зависит от массы частицы. Мы видим, что масса частицы, которая в классической механике выступала как мера инертности, теперь выступает в новой функции – как мера энергосодержания тела. Даже покоящееся тело, согласно теории относительности, обладает запасом энергии – энергией покоя.

<u>**Кинетическая энергия**</u>. Кинетическую энергию определим, как и в классической механике, как энергию движения частицы:

$$T = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} - 1\right). \qquad (8)$$

При малых скоростях ($\upsilon << c$) из формулы (8) получим

$$T \approx \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Релятивистский инвариант. Безмассовые частицы.

Из формул для импульса и энергии

$$\vec{P} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

легко получить следующие формулы

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2, \qquad (9)$$

$$\vec{p} = \frac{E\vec{\upsilon}}{c^2}. \quad (10)$$

Рассматривая (9), заметим, что энергия частицы и ее импульс меняются при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, то есть не являются инвариантными величинами. А вот определенная функция этих величин, задаваемая формулой (9), остается постоянной во всех инерциальных системах отсчета. Ее называют релятивистским инвариантом. Таких инвариантных величин в физике не так уж много и все они имеют важнейшее значение. Перечислим некоторые из инвариантов:

Скорость света в вакууме,

Интервал между событиями $ds = \sqrt{(cdt)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)}$,

Собственное время,

Собственная длина,

Масса частицы, энергия покоя

Электрический заряд.

Рассмотрим вопрос о возможности существования частиц с нулевой массой. Из формул для импульса и энергии следует, что частица с нулевой массой может иметь энергию и импульс только в том случае, если она движется со скоростью света. В этом случае связь между энергией и импульсом дается формулой (10):

$$P = \frac{E\upsilon}{c^2} = \frac{E}{c}.$$

Безмассовые частицы могут существовать только в движении, причем со скоростью света. Остановка подобной частицы равносильна ее поглощению (исчезновению). Как сейчас известно, такими частицами являются фотон и, возможно, некоторые виды нейтрино.

О массе

1. Формулы для импульса и энергии получены нами применительно к частице, но «элементарность» этой частицы нигде не использовалась. Поэтому полученные формулы в равной степени применимы и к любому сложному телу, состоящему из многих частиц. При этом под m нужно понимать полную массу тела, а под V – скорость его движения тела как целого.

2. Импульс аддитивен, то есть импульс системы частиц равен сумме их импульсов. Если ограничиться рассмотрением системы невзаимодействующих частиц, то энергия системы равна сумме энергий составляющих ее частиц.

3. Если E – энергия системы, а p – ее импульс, то формулу

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2 \quad (1)$$

следует рассматривать, как определение массы системы частиц. Масса тела (системы частиц) зависит от характера взаимодействия между частицами тела и их внутреннего движения.

4. В качестве примера рассмотрим систему из двух невзаимодействующих частиц. Рассмотрим два случая.

А) Две одинаковые частицы движутся в противоположных направлениях, каждая со скоростью V_1. Масса каждой частицы m_1. Тогда:

$$p = 0, \quad E = \frac{2m_1c^2}{\sqrt{1-(V_1\ /c)^2}}.$$

Из формулы (1) для массы системы получим

$$m = \frac{2m_1}{\sqrt{1-(V_1/c)^2}}$$

Б) Две одинаковые частицы движутся в одном направлении, каждая со скоростью V_1. Масса каждой частицы m_1. Тогда:

$$p = \frac{2m_1V_1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad E = \frac{2m_1c^2}{\sqrt{1-(V_1/c)^2}}.$$

Из формулы (1) получим

$$m = 2m_1,$$

что вполне очевидно, если перейти в систему отсчета, где частицы покоятся.

<u>Пример 1.</u> Энергетический выход ядерной реакции. Рассмотрим ядерную реакцию типа

$$A_1 + A_2 \to A_3 + A_4,$$

где слева – исходные ядра, справа – ядра – продукты реакции. По закону сохранения полной энергии

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4.$$

Учитывая, что полная энергия каждой частицы может быть представлена в виде энергии покоя mc^2 и кинетической энергии K, закон сохранения энергии перепишем в виде

$$(m_1 + m_2)c^2 + K_{12} = (m_3 + m_4)c^2 + K_{34},$$

где K_{12} и K_{34} – суммарные кинетические энергии ядер до и после реакции. Приращение суммарной кинетической энергии ядер в результате реакции называют энергетическим выходом ядерной реакции

$$Q = K_{34} - K_{12} = \left[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)\right]c^2.$$

Величина Q может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от характера ядерной реакции. Таким образом, энергетический выход ядерной реакции определяется разностью суммарных масс частиц до и после реакции.

<u>Пример 2.</u> Распад частиц. Пусть покоящаяся частица A_1 самопроизвольно распадается на частицы A_2 и A_3:

$$A_1 \to A_2 + A_3.$$

Тогда

$$m_1c^2 = (m_2 + m_3)c^2 + K_{23}.$$

$K_{23} > 0$, иначе реакция невозможна. Следовательно, $m_1 > m_2 + m_3$. В противном случае самопроизвольный распад невозможен. Эксперимент полностью подтверждает данный вывод.

<u>Пример 3.</u> Неупругое столкновение частицы с такой же, но покоящейся с образованием новой частицы. В K-системе отсчета частица массой m со скоростью V налетает на такую же, но покоящуюся частицу. Найдем скорость составной частицы U и ее массу M.

<u>Решение</u>.

По закону сохранения импульса

$$\frac{mV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{MU}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}.$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}+mc^2=\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}.$$

Из этой системы уравнений найдем

$$U=\frac{V}{1+\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad M=m\sqrt{2\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\right)}.$$

При малых скоростях $U=V/2$, $M=2m$.