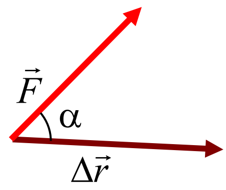
Закон сохранения энергии

Работа и кинетическая энергия

Определения

Работа силы



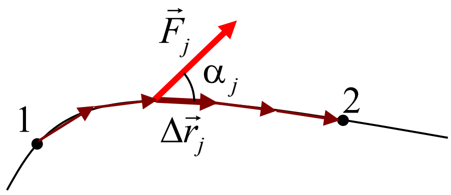
Работа силы $\vec{F}$ на малом перемещении $\Delta\vec{r}$ определяется как скалярное произведение векторов силы и перемещения:

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r} .$$

Расписывая скалярное произведение, получим

$$\Delta A = F\Delta r\cos\alpha = F_\tau \Delta r = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z ,$$

где $F_\tau = F\cos\alpha$.



Работа на всем пути равна:

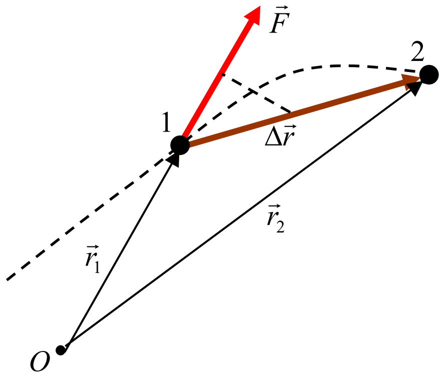
$$A = \sum \vec{F}_j \Delta\vec{r}_j .$$

Эта сумма бесконечного числа бесконечно малых слагаемых называется интегралом вдоль заданной траектории, соединяющей точки 1 и 2, и обозначается следующим образом:

$$A = \sum \vec{F}_j \Delta\vec{r}_j = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F_\tau dr = \int_1^2 Fdr\cos\alpha , \qquad (1)$$

где F_τ — проекция силы на направление движения точки, а α — угол между силой и этим направлением. Работа и энергия измеряются в джоулях (Дж = Н • м).

<u>Пример 1.</u> Работа постоянной силы $\vec{F}$



$$A = A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\int_1^2 d\vec{r} = \vec{F}\sum \Delta\vec{r}_j = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}\Delta\vec{r}$$

равна скалярному произведению векторов силы и перемещения. Работа постоянной силы не зависит от формы траектории, соединяющей точки 1 и 2.

<u>Мощность.</u> Средняя мощность — отношение работы к интервалу времени. Мгновенная механическая мощность равна

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon} = F_\tau\upsilon . \qquad (2)$$

Мощность измеряется в ваттах (Вт = Дж/с).

<u>Кинетической энергией материальной точки</u> называется величина

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}, \tag{3}$$

где m - масса частицы, υ модуль ее скорости. Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий всех точек системы.

<u>Теоремы. Законы</u>

<u>Теорема о кинетической энергии -</u> Изменение кинетической энергии системы равно суммарной работе всех сил, действующих на точки ссистемы:

$$A_{всех\ сил} = E_{k2} - E_{k1} \ . \tag{4}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть при перемещении материальной точки по некоторой траектории на нее действует сила $\vec{F}$. Тогда $F\cos\alpha = F_\tau$ - проекция силы на направление касательной к траектории в данной точке. Следовательно, работа силы на участке траектории 1 – 2 равна

$$A = \int_1^2 F_\tau dr = \int_1^2 ma_\tau dr = m\int_1^2 \frac{d\upsilon}{dt}dr = m\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon d\upsilon = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 .$$

Кинетическая энергия системы точек определяется как сумма кинетических энергий всех точек системы. Суммируя работы всех сил, действующих на точки системы, получим (4). Теорема доказана.

<u>Теорема Кёнига.</u> Кинетическая энергия системы материальных точек может быть выражена формулой:

$$E_k = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + E_c \tag{5}$$

где m — масса системы, υ_c — скорость ее центра масс, E_c - кинетическая энергия в системе центра масс.

<u>Доказательство</u>. Обозначим $\vec{\upsilon}'_j$ - скорость точки массы m_j в системе центра масс. Тогда:

$$E_k = \sum \frac{m_j}{2}\left(\vec{\upsilon}'_j + \vec{\upsilon}_c\right)^2 = \sum \frac{m_j}{2}\left(\vec{\upsilon}'_j\right)^2 + \sum \frac{m_j}{2}\left(\vec{\upsilon}_c\right)^2 + \sum \frac{m_j}{2} 2\left(\vec{\upsilon}'_j \vec{\upsilon}_c\right) = E_c + \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \vec{\upsilon}_c \sum m_j \vec{\upsilon}_j \ .$$

Последнее слагаемой в правой части равно нулю, поскольку импульс системы, вычисленный в системе отсчета центра масс (где центр масс покоится), равен нулю. Теорема доказана.

<u>Пример.</u> Кинетическая энергия обруча массы m, который катится без проскальзывания со скоростью υ.

Консервативные силы и потенциальная энергия

<u>Консервативная сила -</u> сила, работа которой зависит только от начального и конечного положений точки приложения силы, но не зависит от траектории ее движения.

Силы, не удовлетворяющие этому условию, называются неконсервативными.

<u>Работа консервативной силы</u> при перемещении точки по замкнутой траектории равна нулю.

<u>Доказательство.</u>

……..

Потенциальное поле – это поле консервативных сил, создаваемое неподвижными внешними источниками.

Потенциальная энергия. По определению изменение потенциальной энергии $U_2 - U_1$ равно работе консервативных сил, взятой с обратным знаком:

$$U_2 - U_1 = -A_{12} \tag{6}$$

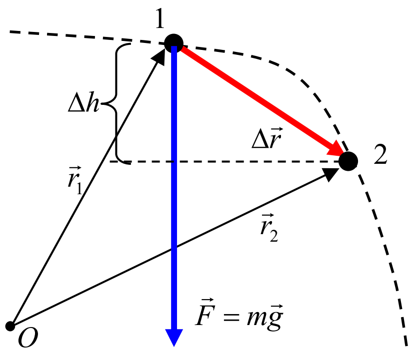
где $U_1 = U(\vec{r}_1)$ и $U_2 = U(\vec{r}_2)$ значения потенциальной энергии в точках 1 и 2, положение которых определяется векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, A_{12} - работа консервативных сил при перемещении частицы из точки 1 в точку 2. Существенно, что эта работа не зависит от формы траектории.

Равенство (6) дает определение разности потенциальных энергий, т. е. определяет потенциальную энергию с точностью до константы. Чтобы сделать определение однозначным, следует задать значение потенциальной энергии в какой-то точке пространства (обычно задают точку, в которой потенциальная энергия равна нулю).

Пример 3. Работа силы тяжести $m\vec{g}$ при перемещении точки массой m с высоты h_1 на высоту h_2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 m\vec{g}d\vec{r} = m\vec{g}\int_1^2 d\vec{r} = m\vec{g}\Delta\vec{r} = mg(h_1 - h_2)\,.$$

Видно, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории. Следовательно, сила тяжести является консервативной силой. Ясно, что консервативными будут и другие силы, образующие однородное силовое поле, например, силы однородного электрического поля.



Из полученного выражения и определения потенциальной энергии следует, что потенциальная энергия точки в поле тяжести равна $U(h) = mgh$, где высота h отсчитывается от любого оговоренного нулевого уровня.

Потенциальная энергия системы материальных точек в поле тяжести равна:

$$E_p = \sum m_j g h_j = mg\frac{\sum m_j h_j}{m} = mgh_c\,,$$

где m – масса системы, h_c - высота, на которой находится ее центр масс.

Пример 4. Работа силы упругости равна

$$A_{12} = \int_1^2 F_x dx = \int_{x_1}^{x_2}(-kx)dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2\,,$$

где x_1 и x_2 - начальная и конечная деформации пружины. Следовательно, потенциальная энергия упругой пружины равна

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2\,,$$

где за нуль принята энергия недеформированной пружины.

<u>Пример 5.</u> Работа силы трения, сопротивления отрицательна как на каждом участке пути, так и вдоль замкнутой траектории. Следовательно, эти силы не удовлетворяют условию консервативности, для них нельзя ввести потенциальную энергию.

<u>Связь силы с потенциальной энергией.</u> Рассмотрим сначала однородное силовое поле $\vec{F} = const$. Пусть точки 1 и 2 лежат на оси x и имеют координаты x_1 и x_2. Тогда для разности потенциальных энергий точках 1 и 2 можно записать

$$U_1 - U_2 = A_{12} = F\Delta x \cos\alpha = F_x \Delta x .$$

Следовательно,

$$F_x = -\frac{U_2 - U_1}{\Delta x} = -\frac{\Delta U}{\Delta x}, \tag{7}$$

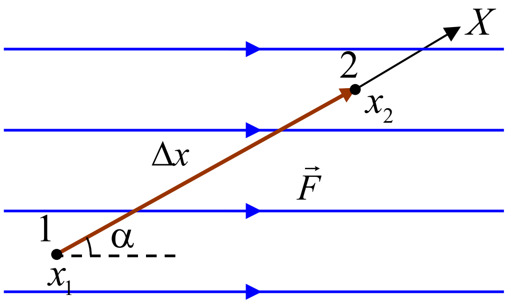


Рис.6.

где ΔU - приращение потенциальной энергии, а Δx - приращение координаты.

Если силовое поле неоднородное, то можно рассмотреть бесконечно близкие точки 1 и 2. Формула (7) тогда будет записана для бесконечно малых приращений потенциальной энергии ΔU и координаты Δx. Такое отношение называют частной производной функции трех переменных $U(x, y, z)$ по переменной x (обозначают $\partial U / \partial x$). Аналогичным образом можно получить формулы для проекций вектора $\vec{F}$ и на остальные координатные оси декартовой системы координат:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} .$$

Эти соотношения можно объединить в одну векторную формулу

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \right). \tag{7}$$

Выражение, стоящее в скобках, называется градиентом скалярной величины U и обозначается $\mathrm{grad}(U)$. Таким образом, формулу (7) можно записать короче

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}(U). \tag{7a}$$

Закон сохранения механической энергии

Механическая энергия системы определяется как сумма ее кинетической и потенциальной энергий:

$$E_{мех} = E_k + U \,. \qquad (10)$$

Потенциальная энергия включает в себя потенциальную энергию взаимодействия между частицами системы и потенциальную энергию частиц системы во внешнем поле.

Изменение механической энергии. Изменение кинетической энергии равно работе всех сил, приложенных к точкам системы:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{всех\ сил} \,.$$

Изменение потенциальной энергии равно работе всех консервативных сил (внутренних и внешних), взятой с обратным знаком:

$$U_2 - U_1 = -A_{конс} \,.$$

Кроме консервативных сил могут действовать и неконсервативные, суммарную работу которых обозначим $A_{неконс}$. Тогда:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{всех\ сил} = A_{конс} + A_{неконс} = -U_2 + U_1 + A_{неконс} \,.$$

Значит, изменение механической энергии равно работе всех неконсервативных сил, как внешних, так и внутренних:

$$(E_{k2} + U_2) - (E_{k1} + U_1) = \Delta E_{мех} = A_{неконс} \,. \qquad (11)$$

Закон сохранения механической энергии: механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, остается постоянной.

Это утверждение является частным проявлением общего фундаментального принципа сохранения энергии: полная энергия замкнутой системы сохраняется. Полная энергия, кроме механической, включает в себя также различные виды внутренней энергии: тепловую, химическую, ядерную. Общий принцип сохранения энергии выходит далеко за пределы ньютоновской механики, в рамках которой мы получили закон сохранения механической энергии. Этот принцип тесно связан с фундаментальным условием однородности времени (равноправием всех моментов времени), он является основанием всего здания современной физики.

Столкновения:

Центральный упругий удар. Сохраняются импульс и механическая энергия системы:

$$\begin{cases} m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x} = mu_{1x} + mu_{2x} \\ \dfrac{m_1\upsilon_{1x}^2}{2} + \dfrac{m_1\upsilon_{2x}^2}{2} = \dfrac{m_1u_{1x}^2}{2} + \dfrac{m_2u_{2x}^2}{2} \end{cases},$$

где υ_{1x}, υ_{2x} - проекции скоростей шаров на ось x до удара, u_{1x}, u_{2x} - проекции скоростей шаров на ось x после удара. Можно решить эту систему уравнений, но удобней поступить иначе:

1) Найдем скорость центра масс: $V_c = \dfrac{m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x}}{m_1 + m_2}$.

2) Найдем скорости до удара в системе центра масс: $V_{1x} = \upsilon_{1x} - V_c$, $V_{2x} = \upsilon_{2x} - V_c$.

3) Найдем скорости после удара в системе центра масс: $U_{1x} = -V_{1x}$, $U_{2x} = -V_{2x}$.

4) Найдем скорости в исходной СО после удара:

5) $u_{1x} = U_{1x} + V_c = 2V_c - \upsilon_{1x}$, $u_{2x} = U_{2x} + V_c = 2V_c - \upsilon_{2x}$

Мы воспользовались тем, что в системе центра масс полный импульс равен нулю, и после удара скорости шаров просто меняются на противоположные. При этом оба закона сохранения выполняются:

$$\begin{cases} \\ m_1V_{1x} + m_2V_{2x} = 0 \\ mU_{1x} + mU_{2x} = 0 \\ \dfrac{m_1V_{1x}^2}{2} + \dfrac{m_1V_{2x}^2}{2} = \dfrac{m_1U_{1x}^2}{2} + \dfrac{m_2U_{2x}^2}{2} \end{cases}$$

Неупругий удар. После удара шары движутся поступательно как единое целое. Вращения не возникает, если удар центральный. Скорости шаров сравниваются в результате действия неконсервативных сил, поэтому при неупругом ударе обязательно выделяется тепло. С помощью закона сохранения импульса найдем конечную скорость шаров:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}\,,$$

после чего вычислим уменьшение механической энергии:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\frac{(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2}{2}\,.$$