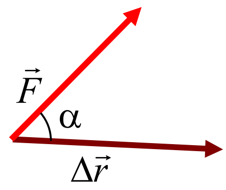
Закон сохранения энергии

Работа и кинетическая энергия

Определения

Работа силы

Работа силы $\vec{F}$ на малом перемещении $\Delta\vec{r}$ определяется как скалярное произведение векторов силы и перемещения:



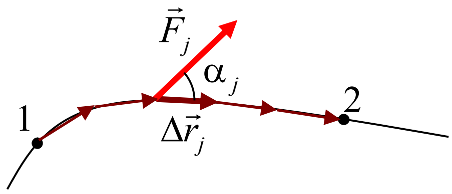
$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r}\ .$$

Расписывая скалярное произведение, получим

$$\Delta A = F\Delta r\cos\alpha = F_\tau \Delta r = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z\ ,$$

где $F_\tau = F\cos\alpha$.

Работа на всем пути равна:



$$A = \sum \vec{F}_j \Delta\vec{r}_j\ .$$

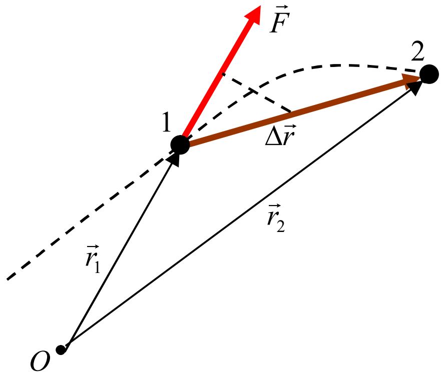
Эта сумма бесконечного числа бесконечно малых слагаемых называется интегралом вдоль заданной траектории, соединяющей точки 1 и 2, и обозначается следующим образом:

$$A = \sum \vec{F}_j \Delta\vec{r}_j = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F_\tau dr = \int_1^2 Fdr\cos\alpha\ , \qquad (1)$$

где F_τ — проекция силы на направление движения точки, а α — угол между силой и этим направлением. Работа и энергия измеряются в джоулях (Дж = Н • м).

<u>Пример 1.</u> Работа постоянной силы $\vec{F}$

$$A = A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\int_1^2 d\vec{r} = \vec{F}\sum \Delta\vec{r}_j = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}\Delta\vec{r}$$



равна скалярному произведению векторов силы и перемещения. Работа постоянной силы не зависит от формы траектории, соединяющей точки 1 и 2.

<u>Мощность.</u> Средняя мощность — отношение работы к интервалу времени. Мгновенная механическая мощность равна

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon} = F_\tau\upsilon\ . \qquad (2)$$

Мощность измеряется в ваттах (Вт = Дж/с).

Кинетической энергией материальной точки называется величина

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}, \tag{3}$$

где m - масса частицы, υ модуль ее скорости. Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий всех точек системы.

Теоремы. Законы

Теорема о кинетической энергии - Изменение кинетической энергии системы равно суммарной работе всех сил, действующих на точки ссистемы:

$$A_{всех\ сил} = E_{k2} - E_{k1} \ . \tag{4}$$

Доказательство. Пусть при перемещении материальной точки по некоторой траектории на нее действует сила $\vec{F}$. Тогда $F\cos\alpha = F_\tau$ - проекция силы на направление касательной к траектории в данной точке. Следовательно, работа силы на участке траектории 1 – 2 равна

$$A = \int_1^2 F_\tau dr = \int_1^2 m a_\tau dr = m\int_1^2 \frac{d\upsilon}{dt} dr = m\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon d\upsilon = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 .$$

Кинетическая энергия системы точек определяется как сумма кинетических энергий всех точек системы. Суммируя работы всех сил, действующих на точки системы, получим (4). Теорема доказана.

Теорема Кёнига. Кинетическая энергия системы материальных точек может быть выражена формулой:

$$E_k = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + E_c \tag{5}$$

где m — масса системы, υ_c — скорость ее центра масс, E_c - кинетическая энергия в системе центра масс.

Доказательство. Обозначим $\vec{\upsilon}_j^{'}$ - скорость точки массы m_j в системе центра масс. Тогда:

$$E_k = \sum \frac{m_j}{2}\left(\vec{\upsilon}_j^{'} + \vec{\upsilon}_c\right)^2 = \sum \frac{m_j}{2}\left(\vec{\upsilon}_j^{'}\right)^2 + \sum \frac{m_j}{2}\left(\vec{\upsilon}_c\right)^2 + \sum \frac{m_j}{2} 2\left(\vec{\upsilon}_j^{'}\vec{\upsilon}_c\right) = E_c + \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \vec{\upsilon}_c \sum m_j \vec{\upsilon}_j \ .$$

Последнее слагаемой в правой части равно нулю, поскольку импульс системы, вычисленный в системе отсчета центра масс (где центр масс покоится), равен нулю. Теорема доказана.

Пример. Кинетическая энергия обруча массы m, который катится без проскальзывания со скоростью υ.

Консервативные силы и потенциальная энергия

Консервативная сила - сила, работа которой зависит только от начального и конечного положений точки приложения силы, но не зависит от траектории ее движения.

Силы, не удовлетворяющие этому условию, называются неконсервативными.

Работа консервативной силы при перемещении точки по замкнутой траектории равна нулю.

Доказательство.

……..

Потенциальное поле – это поле консервативных сил, создаваемое неподвижными внешними источниками.

Потенциальная энергия. По определению изменение потенциальной энергии $U_2 - U_1$ равно работе консервативных сил, взятой с обратным знаком:

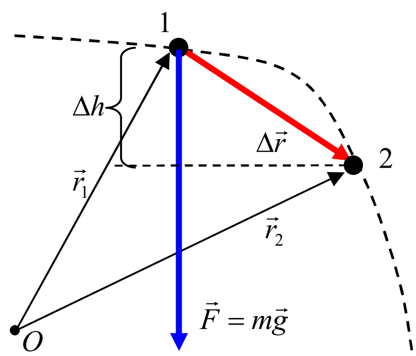
$$U_2 - U_1 = -A_{12} \tag{6}$$

где $U_1 = U(\vec{r}_1)$ и $U_2 = U(\vec{r}_2)$ значения потенциальной энергии в точках 1 и 2, положение которых определяется векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, A_{12} - работа консервативных сил при перемещении частицы из точки 1 в точку 2. Существенно, что эта работа не зависит от формы траектории.

Равенство (6) дает определение разности потенциальных энергий, т. е. определяет потенциальную энергию с точностью до константы. Чтобы сделать определение однозначным, следует задать значение потенциальной энергии в какой-то точке пространства (обычно задают точку, в которой потенциальная энергия равна нулю).

Пример 3. Работа силы тяжести $m\vec{g}$ при перемещении точки массой m с высоты h_1 на высоту h_2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 m\vec{g}d\vec{r} = m\vec{g}\int_1^2 d\vec{r} = m\vec{g}\Delta\vec{r} = mg(h_1 - h_2)\,.$$



Видно, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории. Следовательно, сила тяжести является консервативной силой. Ясно, что консервативными будут и другие силы, образующие однородное силовое поле, например, силы однородного электрического поля.

Из полученного выражения и определения потенциальной энергии следует, что потенциальная энергия точки в поле тяжести равна $U(h) = mgh$, где высота h отсчитывается от любого оговоренного нулевого уровня.

Потенциальная энергия системы материальных точек в поле тяжести равна:

$$E_p = \sum m_j g h_j = mg\frac{\sum m_j h_j}{m} = mgh_c\,,$$

где m – масса системы, h_c - высота, на которой находится ее центр масс.

Пример 4. Работа силы упругости равна

$$A_{12} = \int_1^2 F_x dx = \int_{x_1}^{x_2}(-kx)dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2\,,$$

где x_1 и x_2 - начальная и конечная деформации пружины. Следовательно, потенциальная энергия упругой пружины равна

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2\,,$$

где за нуль принята энергия недеформированной пружины.

<u>Пример 5.</u> Работа силы трения, сопротивления отрицательна как на каждом участке пути, так и вдоль замкнутой траектории. Следовательно, эти силы не удовлетворяют условию консервативности, для них нельзя ввести потенциальную энергию.

<u>Связь силы с потенциальной энергией.</u> Рассмотрим сначала однородное силовое поле $\vec{F} = const$. Пусть точки 1 и 2 лежат на оси x и имеют координаты x_1 и x_2. Тогда для разности потенциальных энергий точках 1 и 2 можно записать

$$U_1 - U_2 = A_{12} = F\Delta x \cos\alpha = F_x \Delta x .$$

Следовательно,

$$F_x = -\frac{U_2 - U_1}{\Delta x} = -\frac{\Delta U}{\Delta x}, \tag{7}$$

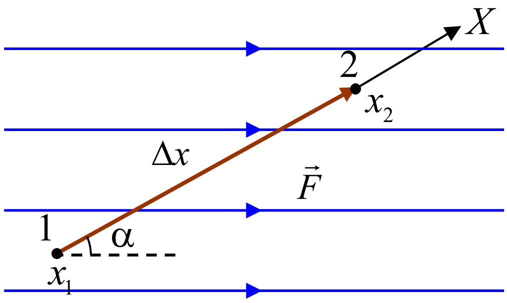


Рис.6.

где ΔU - приращение потенциальной энергии, а Δx - приращение координаты.

Если силовое поле неоднородное, то можно рассмотреть бесконечно близкие точки 1 и 2. Формула (7) тогда будет записана для бесконечно малых приращений потенциальной энергии ΔU и координаты Δx. Такое отношение называют частной производной функции трех переменных $U(x, y, z)$ по переменной x (обозначают $\partial U / \partial x$). Аналогичным образом можно получить формулы для проекций вектора $\vec{F}$ и на остальные координатные оси декартовой системы координат:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} .$$

Эти соотношения можно объединить в одну векторную формулу

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right). \tag{7}$$

Выражение, стоящее в скобках, называется градиентом скалярной величины U и обозначается $\mathrm{grad}(U)$. Таким образом, формулу (7) можно записать короче

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}(U) . \tag{7a}$$

Закон сохранения механической энергии

<u>Механическая энергия системы</u> определяется как сумма ее кинетической и потенциальной энергий:

$$E_{мех} = E_k + U . \tag{10}$$

Потенциальная энергия включает в себя потенциальную энергию взаимодействия между частицами системы и потенциальную энергию частиц системы во внешнем поле.

<u>Изменение механической энергии</u>. Изменение кинетической энергии равно работе всех сил, приложенных к точкам системы:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{всех\ сил}.$$

Изменение потенциальной энергии равно работе всех консервативных сил (внутренних и внешних), взятой с обратным знаком:

$$U_2 - U_1 = -A_{конс}.$$

Кроме консервативных сил могут действовать и неконсервативные, суммарную работу которых обозначим $A_{неконс}$. Тогда:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{всех\ сил} = A_{конс} + A_{неконс} = -U_2 + U_1 + A_{неконс}.$$

Значит, изменение механической энергии равно работе всех неконсервативных сил, как внешних, так и внутренних:

$$(E_{k2} + U_2) - (E_{k1} + U_1) = \Delta E_{мех} = A_{неконс}. \qquad (11)$$

<u>Закон сохранения механической энергии</u>: механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, остается постоянной.

Это утверждение является частным проявлением общего фундаментального принципа сохранения энергии: полная энергия замкнутой системы сохраняется. Полная энергия, кроме механической, включает в себя также различные виды внутренней энергии: тепловую, химическую, ядерную. Общий принцип сохранения энергии выходит далеко за пределы ньютоновской механики, в рамках которой мы получили закон сохранения механической энергии. Этот принцип тесно связан с фундаментальным условием однородности времени (равноправием всех моментов времени), он является основанием всего здания современной физики.

<u>Столкновения:</u>

Центральный упругий удар. Сохраняются импульс и механическая энергия системы:

$$\begin{cases} m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x} = m_1u_{1x} + m_2u_{2x} \\ \dfrac{m_1\upsilon_{1x}^2}{2} + \dfrac{m_1\upsilon_{2x}^2}{2} = \dfrac{m_1u_{1x}^2}{2} + \dfrac{m_2u_{2x}^2}{2} \end{cases},$$

где υ_{1x}, υ_{2x} - проекции скоростей шаров на ось x до удара, u_{1x}, u_{2x} - проекции скоростей шаров на ось x после удара. Можно решить эту систему уравнений, но удобней поступить иначе:

1) Найдем скорость центра масс: $V_c = \dfrac{m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x}}{m_1 + m_2}$.

2) Найдем скорости до удара в системе центра масс: $V_{1x} = \upsilon_{1x} - V_c$, $V_{2x} = \upsilon_{2x} - V_c$.

3) Найдем скорости после удара в системе центра масс: $U_{1x} = -V_{1x}$, $U_{2x} = -V_{2x}$.

4) Найдем скорости в исходной СО после удара:

5) $u_{1x} = U_{1x} + V_c = 2V_c - \upsilon_{1x}$, $u_{2x} = U_{2x} + V_c = 2V_c - \upsilon_{2x}$

Мы воспользовались тем, что в системе центра масс полный импульс равен нулю, и после удара скорости шаров просто меняются на противоположные. При этом оба закона сохранения выполняются:

$$\begin{cases} m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} = 0 \\ m_1 U_{1x} + m_2 U_{2x} = 0 \\ \dfrac{m_1 V_{1x}^2}{2} + \dfrac{m_1 V_{2x}^2}{2} = \dfrac{m_1 U_{1x}^2}{2} + \dfrac{m_2 U_{2x}^2}{2} \end{cases}$$

Неупругий удар. После удара шары движутся поступательно как единое целое. Вращения не возникает, если удар центральный. Скорости шаров сравниваются в результате действия неконсервативных сил, поэтому при неупругом ударе обязательно выделяется тепло. С помощью закона сохранения импульса найдем конечную скорость шаров:

$$m_1 \vec{\upsilon}_1 + m_2 \vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

после чего вычислим уменьшение механической энергии:

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2}{2}.$$