5. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Момент силы.

Моментом силы относительно точки называется физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (y \cdot F_z - z \cdot F_y) - \vec{j} \cdot (x \cdot F_z - z \cdot F_x) + \vec{k} \cdot (x \cdot F_y - y \cdot F_x) .$$

Для модуля момента силы имеем

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot l .$$

Плечом l силы $\vec{F}$ относительно точки O называется расстояние l от точки O до линии действия силы $\vec{F}$:

$$l = r \cdot \sin\alpha = r \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(\vec{r}, \vec{F})}{r \cdot F}\right)^2} = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{(x \cdot F_x + y \cdot F_y + z \cdot F_z)^2}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} .$$

5.1. К материальной точке, радиус – вектор которой относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = 1{,}5\vec{i} + 2\vec{j}$. Вычислите момент $\vec{M}$ и плечо l силы $\vec{F}$ относительно точки O.

5.2. К материальной точке, радиус – вектор которой относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = -1{,}5\vec{i} - 2\vec{j}$. Вычислите момент $\vec{M}$ и плечо l силы $\vec{F}$ относительно точки O.

5.3. К материальной точке, радиус – вектор которой относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = -2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$. Вычислите момент $\vec{M}$ и плечо l силы $\vec{F}$ относительно точки O.

5.4. К материальной точке, радиус – вектор которой относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = 2\vec{i} - 1{,}5\vec{j}$. Вычислите момент $\vec{M}$ и плечо l силы $\vec{F}$ относительно точки O.

5.5. К материальной точке, радиус – вектор которой относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = 2\vec{i}$. Вычислите момент $\vec{M}$ и плечо l силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Момент импульса материальной точки.

Моментом импульса материальной точки относительно точки O называется физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора материальной точки на вектор импульса материальной точки:

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}] .$$

$$\frac{\vec{L}}{m} = [\vec{r}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (y \cdot v_z - z \cdot v_y) - \vec{j} \cdot (x \cdot v_z - z \cdot v_x) + \vec{k} \cdot (x \cdot v_y - y \cdot v_x)$$

Для модуля момента импульса имеем

$$L = m \cdot v \cdot r \cdot \sin\alpha = m \cdot v \cdot l .$$

Плечом l вектора импульса $m\vec{v}$ материальной точки относительно точки O называется расстояние l от точки O до линии, на которой лежит вектор $m\vec{v}$.

$$l = r\cdot\sin\alpha = r\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} = r\cdot\sqrt{1-\left(\frac{(\vec{r},\vec{v})}{r\cdot v}\right)^2} = \sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{\left(x\cdot v_x+y\cdot v_y+z\cdot v_z\right)^2}{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

5.6. Радиус – вектор материальной точки относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Импульс этой материальной точки равен $\vec{p} = 1{,}5\vec{i} + 2\vec{j}$. Вычислите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O.

5.7. Радиус – вектор материальной точки относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Импульс этой материальной точки равен $\vec{p} = -1{,}5\vec{i} - 2\vec{j}$. Вычислите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O.

5.8. Радиус – вектор материальной точки относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Импульс этой материальной точки равен $\vec{p} = -2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$. Вычислите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O.

5.9. Радиус – вектор материальной точки относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Импульс этой материальной точки равен $\vec{p} = 2\vec{i} - 1{,}5\vec{j}$. Вычислите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O.

5.10. Радиус – вектор материальной точки относительно начала координат O равен $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Импульс этой материальной точки равен $\vec{p} = 2\vec{i}$. Вычислите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O.

Уравнение моментов $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ *или закон изменения момента импульса.*

5.11. Радиус – вектор материальной точки относительно начала координат O равен $\vec{r} = vt\vec{i} + l\vec{j}$. Импульс этой материальной точки равен $\vec{p} = mv\vec{i}$. Здесь v - величина постоянной скорости материальной точки. Найдите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O. Затем найдите производную $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$. После этого определите вектор силы, действующей на материальную точку и, наконец, найдите момент силы относительно начала координат O. Теперь убедитесь в справедливости уравнения моментов.

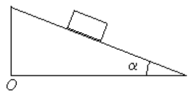
5.12. Радиус – вектор материальной точки относительно начала координат O равен $\vec{r} = \dfrac{at^2}{2}\vec{i} + l\vec{j}$. Импульс этой материальной точки равен $\vec{p} = mat\vec{i}$. Здесь a - величина постоянного ускорения материальной точки. Найдите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O. Затем найдите производную $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$. После этого определите вектор силы, действующей на материальную точку и, наконец, найдите момент силы относительно начала координат O. Теперь убедитесь в справедливости уравнения моментов.

5.13. Радиус – вектор материальной точки относительно начала координат O равен $\vec{r} = r\cdot\cos(\omega t)\vec{i} + r\cdot\sin(\omega t)\vec{j}$. Импульс этой материальной точки равен $\vec{p} = -mv\cdot\sin(\omega t)\vec{i} + mv\cdot\cos(\omega t)\vec{j}$. Здесь v и ω- постоянные величины. Найдите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O. Затем найдите производную $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$. После этого определите вектор силы, действующей на материальную точку и, наконец, найдите момент силы относительно начала координат O. Теперь убедитесь в справедливости уравнения моментов.

5.14. Небольшое тело массой m брошено со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту в однородном поле сил тяжести (ускорение свободного падения равно $\vec{g}$). Найдите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно стартовой точки O.

Затем найдите производную $\frac{d\vec{L}}{dt}$. После этого определите вектор силы, действующей на материальную точку и, наконец, найдите момент силы относительно точки *O*. Теперь убедитесь в справедливости уравнения моментов.

5.15. Небольшой брусок массой *m* скользит по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α в однородном поле сил тяжести (ускорение свободного падения равно $\vec{g}$) из состояния покоя. Найдите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки *O* (см. рис.). Затем найдите производную $\frac{d\vec{L}}{dt}$. После этого определите вектор силы, действующей на материальную точку и, наконец, найдите момент силы относительно точки *O*. Теперь убедитесь в справедливости уравнения моментов.



5.16. Небольшое тело массой *m* подвешено на легкой нерастяжимой нити длины *l* в однородном поле сил тяжести (ускорение свободного падения равно $\vec{g}$) и движется по окружности в горизонтальной плоскости («конический маятник»). Найдите момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки подвеса. Затем найдите производную $\frac{d\vec{L}}{dt}$. После этого определите вектор силы, действующей на материальную точку и, наконец, найдите момент силы относительно точки подвеса. Теперь убедитесь в справедливости уравнения моментов.

5.17. Горизонтальный гладкий диск вращают с постоянной угловой скоростью Ω вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр – точку *O*. Из этой точки в момент $t = 0$ пустили шайбу массы *m* со скоростью v_0. Найдите момент импульса шайбы $\vec{L}(t)$ относительно точки *O* в системе отсчета, связанной с диском. Убедитесь, что этот момент импульса обусловлен действием силы Кориолиса.

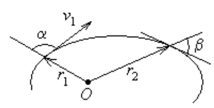
5.18. Однородный шар массы *m* и радиуса *R* начинает скатываться без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найдите зависимость от времени модуля момента импульса шара относительно точки касания в начальный момент времени.

Сохранение момента импульса.

Если импульс момента силы $\vec{M} \cdot dt$, вычисленный относительно некоторой точки равен нулю, то момент импульса, вычисленный относительно той же точки, сохраняется:

$$\text{если} \quad \vec{M} \cdot dt = 0, \quad \text{то} \quad \vec{L} = const.$$

5.19. Частица движется в центральном поле сил с центром в точке O (см. рис.). На рисунке показан участок траектории. Считая известными v_1, α, r_1, β и r_2 , найдите v_2.



5.20. Спутник движется по эллиптической орбите вокруг планеты. Напишите формулу, связывающую скорости v_1, v_2 и соответствующие расстояния r_1, r_2 (от спутника до планеты) для моментов максимального и минимального удаления спутника от планеты.

Собственный момент импульса.

Собственным моментом импульса материальной точки называется ее момент импульса, вычисленный в системе отсчета центра масс:

$$\tilde{\vec{L}} = \left[\tilde{\vec{r}}, m\tilde{\vec{v}}\right],$$

при этом вектор $\tilde{\vec{L}}$ от выбора начала отсчета радиус-вектора не зависит.

Момент импульса системы материальных точек определяется как сумма (конечно векторная) моментов импульса материальных точек, причем все моменты импульсов вычисляются относительно одной и той же точки пространства.

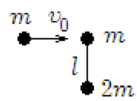
Наконец приведем формулу, связывающую момет импульса системы материальных точек в лабораторной системе отсчета и в системе отсчета центра масс:

$$\vec{L} = \tilde{\vec{L}} + \left[\vec{R}_c, \vec{P}\right].$$

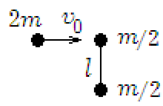
Здесь второе слагаемое в правой части равенства – векторное произведение радиус – вектора центра масс системы материальных точек на импульс системы материальных точек в лабораторной системе отсчета.

5.21. Две частицы массами m_1 и m_2 движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, причем $v_1 = v_2 = v$. Известен радиус-вектор $\vec{l}$, проведенный от частицы 1 к частице 2. Вектор $\vec{v}_1$ перпендикулярен $\vec{l}$, а вектор $\vec{v}_2$ направлен вдоль $\vec{l}$. Непосредственным вычислением найдите собственный момент импульса этой системы частиц.

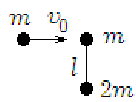
5.22. Шарик массы m, двигавшийся со скоростью $\vec{v}_0$ испытал упругое лобовое столкновение с шариком массы m покоившейся жесткой гантели. Масса второго шарика гантели равна $2m$, длина легкого соединительного стержня равна l. Считая шарики материальными точками, найдите собственный момент импульса $\tilde{\vec{L}}$ гантели после соударения.



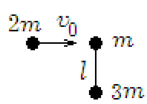
5.23. Шарик массы $2m$, двигавшийся со скоростью $\vec{v}_0$ испытал упругое лобовое столкновение с одним из шариков покоившейся жесткой гантели. Масса каждого шарика гантели равна $m/2$, длина легкого соединительного стержня равна l. Считая шарики материальными точками, найдите собственный момент импульса $\tilde{\vec{L}}$ гантели после соударения.



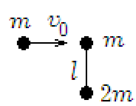
5.24. Шарик массы m, двигавшийся со скоростью $\vec{v}_0$ приклеился к шарику массы m покоившейся жесткой гантели. Масса второго шарика гантели равна $2m$, длина легкого соединительного стержня равна l. Считая шарики материальными точками, найдите собственный момент импульса $\tilde{\vec{L}}$ гантели после соударения и приращение ΔE механической энергии системы тел.



5.25. Шарик массы $2m$, двигавшийся со скоростью $\vec{v}_0$ приклеился к шарику массы m покоившейся жесткой гантели. Масса второго шарика гантели равна $3m$, длина легкого соединительного стержня равна l. Считая шарики материальными точками, найдите собственный момент импульса $\tilde{\vec{L}}$ гантели после соударения.



5.26. Шарик массы m, двигавшийся со скоростью $\vec{v}_0$ приклеился к шарику массы m покоившейся жесткой гантели. Масса второго шарика гантели равна $2m$, длина легкого соединительного стержня равна l. Считая шарики материальными точками, найдите ΔE приращение кинетической энергии системы тел в результате соударения и количество N оборотов гантели за время t.



Ответы

5.1 $\vec{M}_{.} = 0;$

$l_{.} = 0.$

5.2 $\vec{M}_{.} = 0;$

$l_{.} = 0.$

5.3 $\vec{M}_{.} = 12{,}5 \cdot \vec{k};$

$l_{.} = \dfrac{M}{F} = 5\,\text{м}.$

5.4 $\vec{M}_{.} = -12{,}5 \cdot \vec{k};$

$l_{.} = 5\,\text{м}.$

5.5 $\vec{M}_{.} = -8 \cdot \vec{k};$

$l_{.} = 4\,\text{м}.$

5.6 $\vec{L}_{.} = 0.$

5.7 $\vec{L}_{.} = 0.$

5.8 $\vec{L}_{.} = 12{,}5 \cdot \vec{k}.$

5.9 $\vec{L}_{.} = -12{,}5 \cdot \vec{k}.$

5.10 $\vec{L}_{.} = -8 \cdot \vec{k}.$

5.18 $L_{.} = mgR \cdot \sin\alpha \cdot t.$

5.19 $v_{2.} = v_1 \cdot \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$

5.20 $v_1 \cdot r_{1.} = v_2 \cdot r_2.$

5.21 $\tilde{\vec{L}}_{.} = \dfrac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\left[\vec{v}_1, \vec{l}\,\right].$

5.22 $\tilde{L}_{.} = \dfrac{2}{3} m v_0 l;$ Вектор $\tilde{\vec{L}}_{.}$ направлен от читателя, за лист.

5.23 $\tilde{L}_{.} = \dfrac{2}{5} m v_0 l.$

5.24 $\tilde{L}_{.} = \dfrac{1}{2} m v_0 l;$

$\Delta E_{.} = -\dfrac{m v_0^2}{4}.$

5.25 $\tilde{L}_{.} = m v_0 l.$

5.26 $\Delta E_{.} = -\dfrac{m v_0^2}{4};$

$N_{.} = \dfrac{v_0 \cdot t}{4\pi \cdot l}.$