Групповая скорость

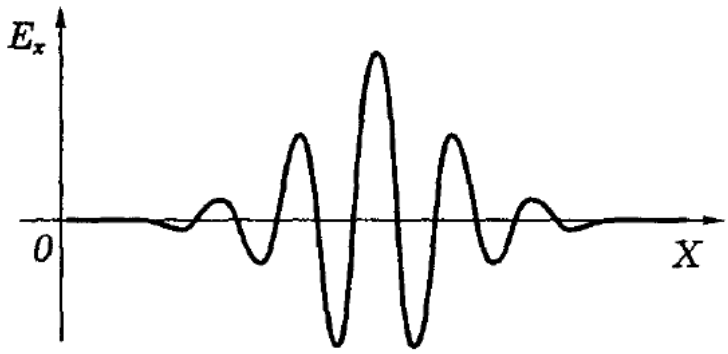
Строго монохроматическая волна, не имеющая ни начала, ни конца во времени – это идеализация. Таких волн в природе нет. Заметим также, что монохроматическая волна $A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$ не может нести информацию от передатчика к приемнику, поскольку каждый период колебаний есть точная копия предыдущего. Чтобы передать информацию с такой волной ее нужно промодулировать, то есть изменить амплитуду, частоту или фазу в соответствии с изменением смыслового сигнала.

Рассмотрим передатчик, который излучает не монохроматическую волну, а сигнал общего вида $E(t) = f(t)$. В соответствии с теоремой Фурье для широкого класса функций $f(t)$ справедливо выражение

$$f(t) = \sum A_k \cos(\omega_k t + \alpha_k)\,.$$

где величины A_k, ω_k и α_k вычисляются по определенным правилам. Таким образом, любую волну можно представить в виде суперпозиции монохроматических волн в некотором диапазоне частот.

Суперпозицию волн, мало отличающихся друг от друга по частотам, называют волновым пакетом. Вид волнового пакета в некоторый момент времени показан на рис. В его пределах монохроматические составляющие усиливают друг друга, вне пакета практически гасят друг друга.



<u>Рассмотрим основные закономерности распространения волновых пакетов.</u>

1) В вакууме все монохроматические волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью

$$\boxed{\upsilon = c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}}\ , \qquad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число. С такой же скоростью в вакууме распространяется волновой пакет, <u>не изменяя своей формы</u>.

2) В диспергирующей среде (фазовая скорость зависит от частоты или длины волны) волновой пакет расплывается, поскольку скорости его монохроматических составляющих отличаются друг от друга. Понятие скорости такой волны требует уточнения.

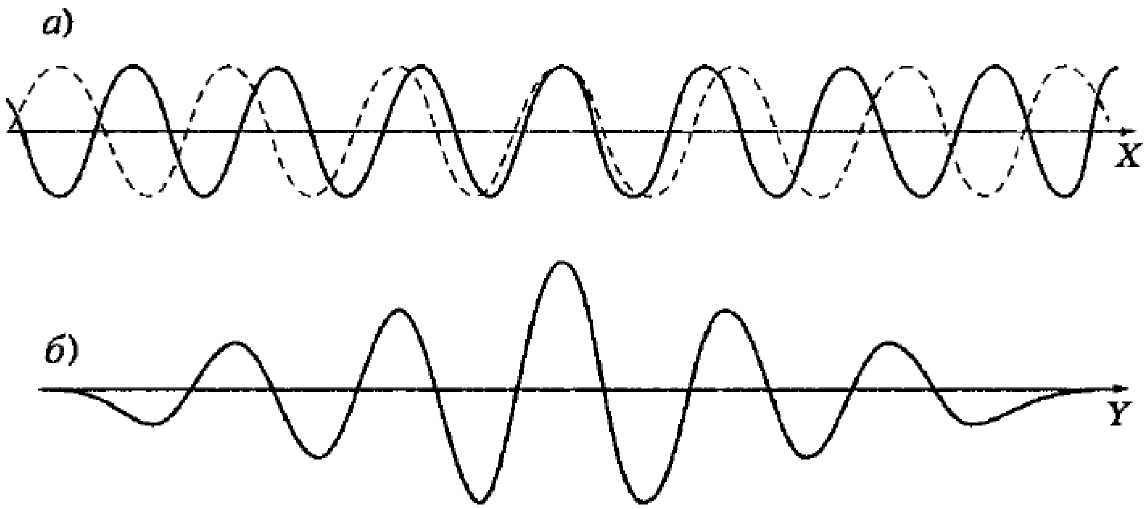
3) Если дисперсия достаточно мала, то расплывание волнового пакета происходит не слишком быстро. В этом случае волновому пакету можно приписать скорость u, с которой перемещается его «центр». Эта скорость называется групповой. Далее мы покажем, что групповая скорость определяется формулой

$$\boxed{u = \frac{d\omega}{dk}}. \qquad (2)$$

4) В тех случаях, когда групповая скорость имеет смысл (то есть волновой импульс при распространении не расплывается), групповая скорость совпадает со скоростью распространения энергии.

5) В области нормальной дисперсии групповая скорость меньше фазовой, в области аномальной дисперсии групповая скорость больше фазовой.

Вывод формулы (2) на примере суперпозиции двух волн с одинаковыми амплитудами и несколько отличными друг от друга длинами волн и частотами. На рис. показано их относительное расположение в некоторый момент времени, а также результат их суперпозиции..



Нас будет интересовать скорость, с которой перемещается место с максимальной амплитудой – это и будет скорость волнового пакета – групповая скорость. Найдем ее.

Пусть уравнения этих монохроматических волн имеют вид:

$$E_1 = A\cos(\omega t - kx)\,,$$

$$E_2 = A\cos\left[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x\right].$$

Тогда

$$E = E_1 + E_2 \approx 2A\cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right)\cos(\omega t - kx)\,.$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение монохроматической волны, амплитуда которой меняется по закону

$$A_0 = \left|2A\cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right)\right|.$$

Точки, соответствующие максимуму амплитуды удовлетворяют уравнению

$$td\omega = xdk\,.$$

Отсюда

$$x = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)t\,.$$

Величина в скобках и есть групповая скорость:

$$u = \frac{d\omega}{dk}\,.$$

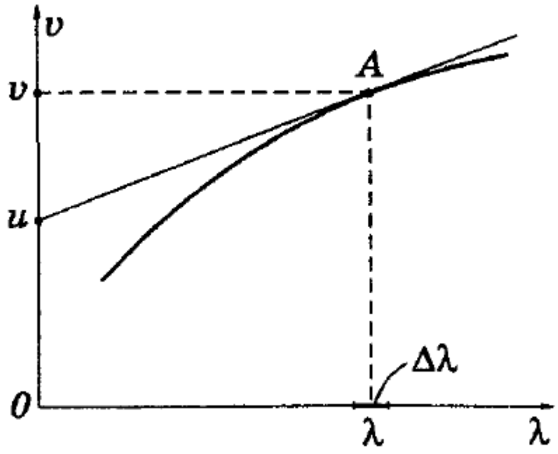
Выражение для групповой скорости можно представить в ином виде, учитывая, что $\upsilon = \omega / k$:

$$u = \frac{d(\upsilon k)}{dk} = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk}\,.$$

Так как $k = 2\pi/\lambda$, то $dk = -(2\pi/\lambda^2)d\lambda$ и

$$\boxed{u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}}. \qquad (3)$$

Это так называемая формула Рэлея. В области нормальной дисперсии ($d\upsilon/d\lambda > 0$) групповая скорость оказывается меньше фазовой. В отсутствие дисперсии $d\upsilon/d\lambda = 0$, и групповая скорость совпадает с фазовой. Существует простой графический способ нахождения групповой скорости по кривой $\upsilon(\lambda)$. Он показан на рисунке.



В некоторых случаях групповая скорость, вычисленная по формуле $u = d\omega/dk$, оказывается больше скорости света в вакууме. Так будет, например, в области аномальной дисперсии. Это не противоречит СТО, поскольку групповая скорость определяет скорость сигнала лишь тогда, когда волновой импульс в процессе распространения практически не изменяет своей формы. В области аномальной дисперсии это не так.

О спектре сигнала конечной длительности.

Обозначим длительность импульса, то есть интервал времени, в течение которого функция $f(t)$ «достаточно велика», через время Δt. Этот интервал времени простирается от момента $t = 0$, когда все монохроматические компоненты импульса в интервале частот от ω_1 до ω_2 находятся в фазе, до момента времени t_1, когда все компоненты равномерно распределены по фазе в пределах от 0 до 2π, то есть:

$$\Delta t = t_1,$$

где

$$(\omega_2 - \omega_1)t_1 = 2\pi .$$

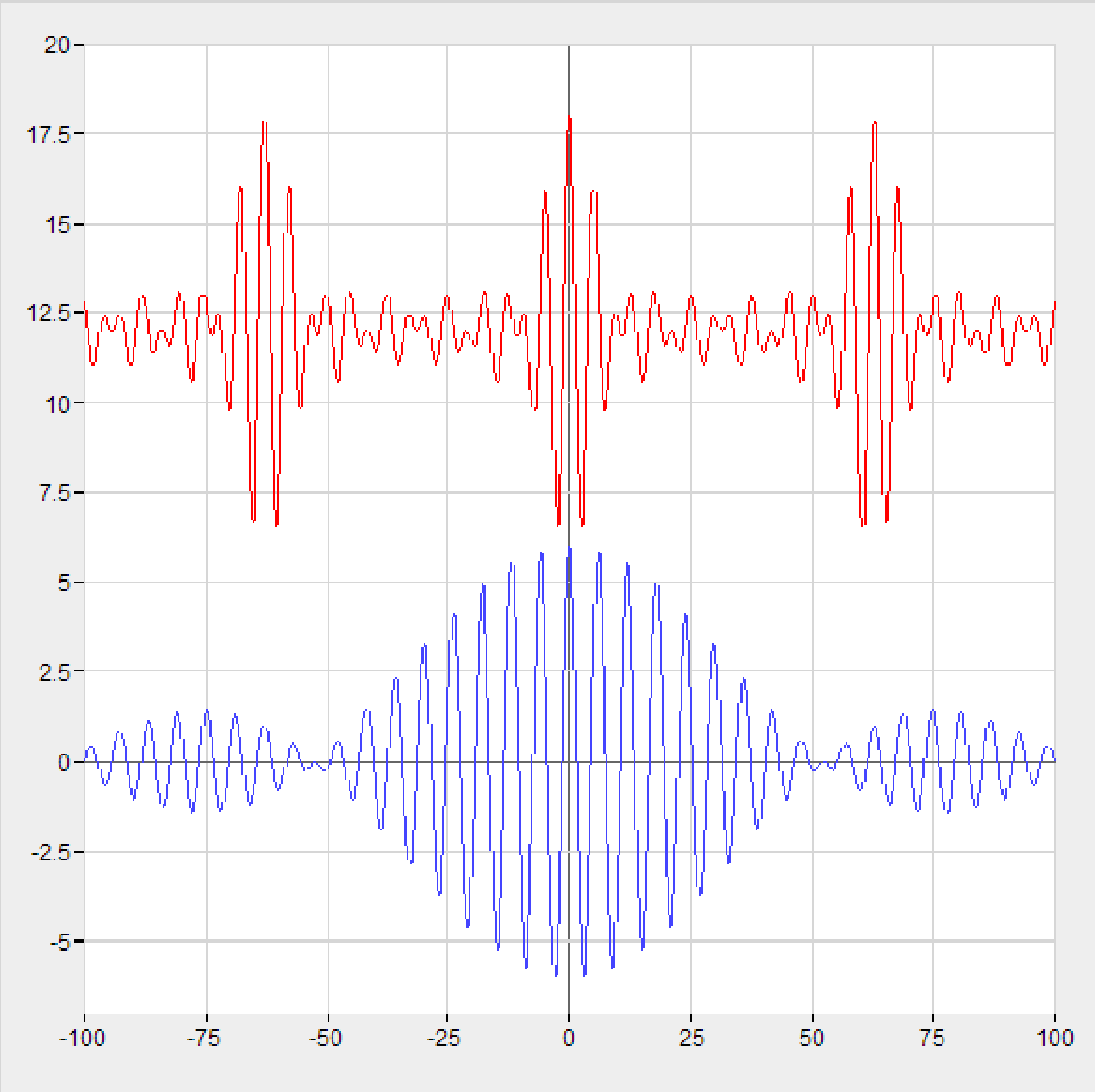
Отсюда следует

$$\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi . \tag{1}$$

Соотношение (1) определяет связь между продолжительностью Δt импульса и полосой частот гармонических компонент, суперпозиция которых образует данный импульс. Это соотношение имеет широкое применение в различных областях физики. Оно не зависит от деталей формы импульса $f(t)$. Важно лишь, чтобы функция $f(t)$ действительно представляла собой импульс, то есть была отлична от нуля в течение конечного интервала времени длительностью Δt. Общее соотношение между интервалом частот $\nu = \omega/2\pi$ и длительностью импульса имеет вид

$$\Delta\nu\Delta t \geq 1 .$$

Равенство заменено неравенством, поскольку в момент $t = 0$ не обязательно все спектральные составляющие колеблются в одинаковых фазах.



Легенда:

cos(x)+cos(1.02*x)+cos(1.04*x)+cos(1.06*x)+cos(1.08*x)+cos(1.1*x)

12+cos(x)+cos(1.1*x)+cos(1.2*x)+cos(1.3*x)+cos(1.4*x)+cos(1.5*x)