

7. Энергия электрического поля

(Примеры решения задач)

Энергия взаимодействия зарядов

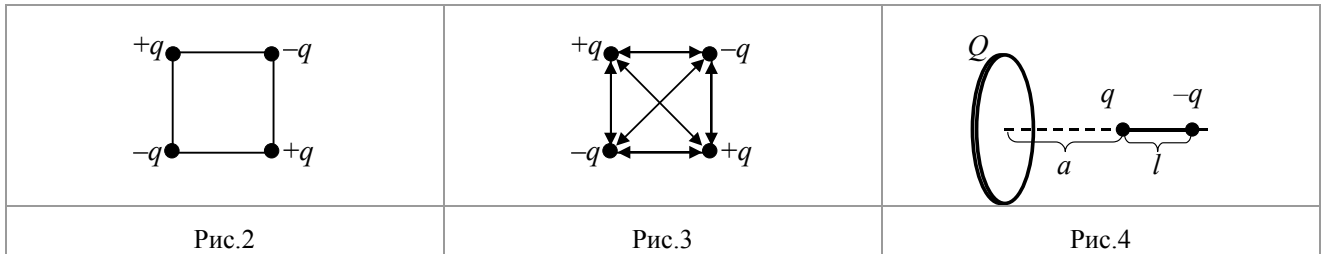
Пример 1.

Определите электрическую энергию взаимодействия точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной a (см. рис.2).

Решение.

На рис.3 условно изображены двунаправленными стрелками все парные взаимодействия зарядов. Учитывая энергии всех этих взаимодействий, получим:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-4 \frac{q^2}{a} + 2 \frac{q^2}{a\sqrt{2}} \right).$$



Пример 2.

Определите электрическую энергию взаимодействия заряженного кольца с диполем, расположенным на его оси, как показано на рис.4. Известны расстояния a , l , заряды Q , q и радиус кольца R .

Решение.

При решении задачи следует учесть все энергии парных взаимодействий зарядов одного тела (кольца) с зарядами другого тела (диполя). Энергия взаимодействия точечного заряда q с зарядом Q , распределенным по кольцу, определяется суммой

$$W_1 = \sum \frac{\Delta Q_i q}{4\pi\epsilon_0 r_i},$$

где ΔQ_i - заряд бесконечно малого фрагмента кольца, r_i - расстояние от этого фрагмента до заряда q . Поскольку все r_i одинаковы и равны $\sqrt{R^2 + a^2}$, то

$$W_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + a^2}} \sum \Delta Q_i = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + a^2}}.$$

Аналогично найдем энергию взаимодействия точечного заряда $-q$ с заряженным кольцом:

$$W_2 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + (a+l)^2}} \sum \Delta Q_i = \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + (a+l)^2}}.$$

Суммируя W_1 и W_2 , получим для энергии взаимодействия кольца с диполем:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (a+l)^2}} \right).$$

Электрическая энергия заряженных проводников

Пример 3.

Определите работу электрических сил при уменьшении в 2 раза радиуса однородно заряженной сферы. Заряд сферы q , ее первоначальный радиус R .

Решение.

Электрическая энергия уединенного проводника определяется формулой $W = (1/2)q\phi$, где q – заряд проводника, ϕ – его потенциал. Учитывая, что потенциал однородно заряженной сферы радиуса R равен $\phi = q/4\pi\epsilon_0 R$, найдем ее электрическую энергию:

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

После уменьшения в два раза радиуса сферы ее энергия становится равной

$$W_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Электрические силы при этом совершают работу

$$A = W_1 - W_2 = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Пример 4.

Два металлических шара, радиусы которых r и $2r$, а соответствующие заряды $2q$ и $-q$, расположены в вакууме на большом расстоянии друг от друга. Во сколько раз уменьшится электрическая энергия системы, если шары соединить тонкой проволокой?

Решение.

После соединения шаров тонкой проволокой их потенциалы становятся одинаковыми

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (2r)},$$

а установившиеся заряды шаров Q_1 и Q_2 получаются в результате перетекания заряда с одного шара на другой. При этом суммарный заряд шаров остается постоянным:

$$Q_1 + Q_2 = 2q - q.$$

Из этих уравнений найдем

$$Q_1 = q/3, \quad Q_2 = 2q/3.$$

Энергия шаров до соединения их проволокой равна

$$W_1 = \frac{(2q)^2}{8\pi\epsilon_0 r} + \frac{(-q)^2}{8\pi\epsilon_0 (2r)},$$

а после соединения

$$W_2 = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2^2}{8\pi\epsilon_0 (2r)}.$$

Подставляя в последнее выражение значения Q_1 и Q_2 , получим после простых преобразований

$$W_1 / W_2 = 27 / 2.$$

Пример 5.

В один шар слились $N = 8$ одинаковых шариков ртути, заряд каждого из которых q . Считая, что в начальном состоянии ртутные шарики находились на большом расстоянии друг от друга, определите, во сколько раз увеличилась электрическая энергия системы.

Решение.

При слиянии ртутных шариков сохраняется их суммарный заряд и объем:

$$Nq = Q,$$

$$N(4/3)\pi r^3 = (4/3)\pi R^3,$$

где Q – заряд шара, R – его радиус, r – радиус каждого маленького ртутного шарика. Суммарная электрическая энергия N уединенных шариков равна

$$W_1 = N \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

Электрическая энергия полученного в результате слияния шара

$$W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

После алгебраических преобразований получим

$$W_2 / W_1 = N^{2/3} = 4.$$

Пример 6.

Металлический шарик радиуса $R = 1$ мм и заряда $q = 0,1$ нКл с большого расстояния медленно приближают к незаряженному проводнику и останавливают, когда потенциал шарика становится равным $\phi = 450$ В. Какую работу для этого следует совершить?

Решение.

Электрическая энергия системы из двух заряженных проводников определяется формулой

$$W = \frac{1}{2}(q_1\phi_1 + q_2\phi_2),$$

где q_1 и q_2 – заряды проводников, ϕ_1 и ϕ_2 – их потенциалы. Так как проводник по условию задачи не заряжен, то

$$W = \frac{1}{2}q_1\phi_1,$$

где q_1 и ϕ_1 заряд и потенциал шара. Когда шар и незаряженный проводник находятся на большом расстоянии друг от друга,

$$\phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

и электрическая энергия системы

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

В конечном состоянии системы, когда потенциал шара стал равным φ , электрическая энергия системы:

$$W_2 = \frac{q\varphi}{2}.$$

Работа внешних сил равна приращению электрической энергии:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{q\varphi}{2} - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -0,0225 \text{ мкДж}.$$

Заметим, что электрическое поле в конечном состоянии системы создается зарядами, индуцированными на проводнике, а также зарядами, неоднородно распределенными по поверхности металлического шара. Рассчитать это поле при известной геометрии проводника и заданном положении металлического шара весьма непросто. Нам не потребовалось этого делать, поскольку в задаче задана не геометрическая конфигурация системы, а потенциал шара в конечном состоянии.

Пример 7.

Система состоит из двух концентрических тонких металлических оболочек с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) и соответствующими зарядами q_1 и q_2 . Найдите электрическую энергию W системы. Рассмотрите также специальный случай, когда $q_2 = -q_1$.

Решение.

Электрическая энергия системы из двух заряженных проводников определяется формулой

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2).$$

Для решения задачи необходимо найти потенциалы внутренней (φ_1) и внешней (φ_2) сфер. Это нетрудно сделать (см. соответствующий раздел пособия):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}, \quad \varphi_2 = \frac{(q_1 + q_2)}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для энергии, получим

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{R_2} \right).$$

При $q_2 = -q_1$ энергия равна

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Собственная электрическая энергия и энергия взаимодействия

Пример 8.

Две проводящие сферы, заряды которых q и $-q$, радиусы R_1 и R_2 , расположены в вакууме на большом расстоянии друг от друга. Сфера большего радиуса R_2 состоит из двух полусфер. Полусферы разъединяют, подносят их к сфере радиуса R_1 , и вновь соединяют, образуя таким образом сферический конденсатор. Определите работу электрических сил при таком составлении конденсатора.

Решение.

Электрическая энергия двух удаленных друг от друга заряженных сфер равна

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Электрическая энергия полученного сферического конденсатора:

$$W_2 = \frac{1}{2}(q\varphi_1 - q\varphi_2),$$

где

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

- потенциал внутренней сферы, $\varphi_2 = 0$ - потенциал внешней сферы. Следовательно,

$$W_2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Работа электрических сил при таком составлении конденсатора:

$$A = W_1 - W_2 = q^2 / 4\pi\epsilon_0 R_2.$$

Заметим, что электрическая энергия сферического конденсатора W_2 равна работе внешних сил по зарядке конденсатора. При этом электрические силы совершают работу $A_{ЭЛ} = -W_2$. Эта работа совершается не только при сближении заряженных обкладок, но и при нанесении заряда на каждую из обкладок. Поэтому $A_{ЭЛ}$ отличается от найденной выше работы A , совершенной электрическими силами только при сближения обкладок.

Пример 9.

Точечный заряд $q = 1,5$ мкКл расположен в центре сферической оболочки, по поверхности которой однородно распределен заряд $Q = 5$ мкКл. Найдите работу электрических сил при расширении оболочки – увеличении ее радиуса от $R_1 = 50$ мм до $R_2 = 100$ мм.

Решение.

Энергия взаимодействия точечного заряда q с зарядами, расположенными на сферической оболочке радиуса R равна

$$W_1 = \sum_i \frac{q \Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_i \Delta Q_i = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R},$$

Собственная электрическая энергия оболочки (энергия взаимодействия зарядов оболочки между собой) равна:

$$W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Работа электрических сил при расширении оболочки:

$$A = \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} \right) - \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} \right).$$

После преобразований получим

$$A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(q + \frac{Q}{2} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 1,8 \text{ Дж.}$$

Другой способ решения

Точечный заряд представим в виде однородно заряженной сферы малого радиуса r и заряда q . Полная электрическая энергия системы равна

$$W = \frac{1}{2} (q\varphi_r + Q\varphi_R),$$

где

$$\varphi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

- потенциал сферы радиуса r ,

$$\varphi_R = \frac{q + Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

- потенциал сферы радиуса R . При расширении внешней сферы электрические силы совершают работу

$$A = W(R_1) - W(R_2).$$

После подстановок и преобразований получим ответ.

Объемная плотность энергии электрического поля

Пример 10.

Какая часть электрической энергии заряженного проводящего шара, расположенного в вакууме, заключена в пределах концентрической с шаром воображаемой сферы, радиус которой в n раз больше радиуса шара?

Решение.

Объемная плотность энергии электрического поля

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}$$

определяет электрическую энергию $dW = w dV$, локализованную в бесконечно малом объеме dV (E – модуль вектора напряженности электрического поля в этом объеме, ϵ – диэлектрическая проницаемость). Чтобы вычислить полную электрическую энергию заряженного проводящего шара, мысленно разобьем все пространство на бесконечно тонкие шаровые слои, concentрические с заряженным шаром. Рассмотрим один из таких слоев радиуса r и толщины dr (см. рис.5). Его объем равен

$$dV = 4\pi r^2 dr,$$

а сосредоточенная в слое электрическая энергия

$$dW = w \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Напряженность E поля заряженного проводящего шара зависит, как известно, от расстояния r до центра шара. Внутри шара $E = 0$, поэтому при вычислении энергии достаточно рассматривать только те шаровые слои, радиус r которых превышает радиус шара R .

При $r > R$ напряженность поля

$$E = \frac{|q|}{4\pi \epsilon_0 r^2},$$

диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1$ и, следовательно

$$dW = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr,$$

где q – заряд шара.

Полная электрическая энергия заряженного шара, определяется интегралом

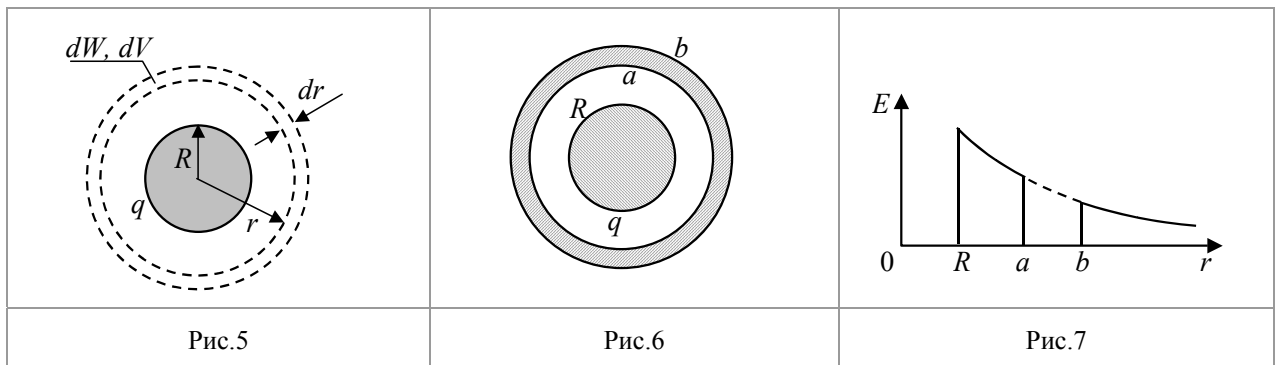
$$W_{\text{п}} = \int_R^{\infty} \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 R},$$

а энергия, сосредоточенная внутри воображаемой сферы радиуса nR , равна

$$W = \int_R^{nR} \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 R} \left(\frac{n-1}{n} \right).$$

Следовательно,

$$\frac{W}{W_{\text{п}}} = \frac{n-1}{n}.$$



Пример 11.

Определите электрическую энергию системы, состоящей из заряженного проводящего шара и концентрического с ним незаряженного проводящего шарового слоя (рис.6). Внутренний и внешний радиусы слоя a и b , радиус шара $R < a$, заряд q , система находится в вакууме.

Решение.

На внутренней и внешней поверхностях шарового слоя распределены индуцированные заряды. Их алгебраическая сумма равна нулю, поэтому индуцированные заряды не создают электрического поля при $r > b$, где r – расстояние от центра системы. В области $r < a$ напряженность поля индуцированных зарядов также равна нулю, поскольку они однородно распределены по сферическим поверхностям. Таким образом, электрическое поле системы совпадает с полем однородно заряженной по поверхности сферы, за исключением внутренней области шарового слоя, где $E = 0$. На рис.7 приведен примерный график зависимости $E(r)$. Опуская подробные выкладки (см. пример 10), запишем для электрической энергии системы:

$$W = \int_R^a w dV + \int_b^\infty w dV,$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$, $w = (\varepsilon_0 E^2) / 2$, $E = |q| / 4\pi\varepsilon_0 r^2$. После интегрирования получим

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Пример 12.

Первоначально заряд q распределен однородно по объему шара радиуса R . Затем вследствие взаимного отталкивания заряды переходят на поверхность шара. Какую работу совершают при этом электрические силы? Диэлектрическую проницаемость считайте равной единице.

Решение.

Работа электрических сил равна убыли электрической энергии:

$$A = W_1 - W_2,$$

где W_1 – электрическая энергия однородно заряженного по объему шара, W_2 – энергия того же шара, однородно заряженного по поверхности. Поскольку суммарный заряд в обоих случаях одинаков, то электрическое поле вне шара при переходе заряда из объема на поверхность не изменяется. Электрическое поле и энергия изменяются только внутри шара. При помощи теоремы Гаусса можно вывести формулу для напряженности поля внутри однородно заряженного шара на расстоянии r от его центра:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}.$$

Электрическая энергия, сосредоточенная внутри шара, определяется интегралом:

$$W_{1 \text{ внутр}} = \int_0^R \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}.$$

Когда все заряды перешли на поверхность шара, электрическое поле, а следовательно, и энергия электрического поля внутри шара стали равными нулю. Таким образом,

$$A = W_1 - W_2 = W_{1\text{внутр}} = \frac{q^2}{40\pi\epsilon_0 R}.$$