# Закон сохранения момента импульса

Введем две новые физические величины. Сначала формально определим их, а затем выявим связи и закономерности.

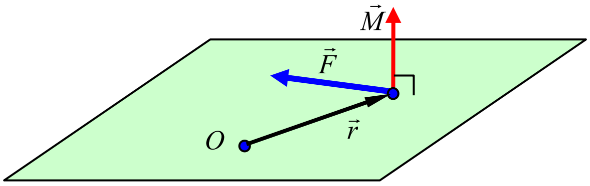
**<u>Момент силы</u>** $\vec{F}$ относительно начала $O$ (некоторой точки пространства) равен

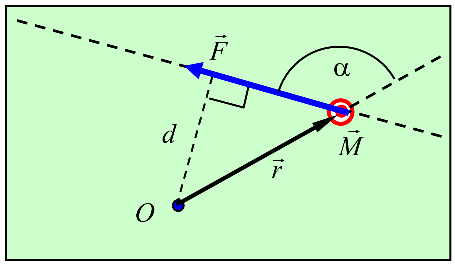
$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \tag{1}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы (рис.). Модуль вектора $\vec{M}$ равен

$$M = rF\sin\alpha = Fd\,,$$

где $d - r\sin\alpha$ - плечо силы – кратчайшее расстояние от линии действия силы до начала $O$.



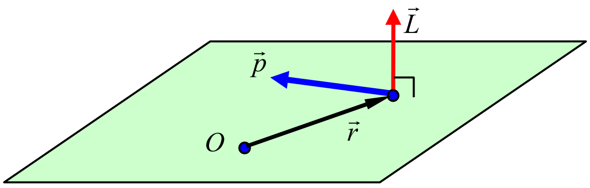

**<u>Момент импульса</u>** материальной точки относительно начала $O$ равен

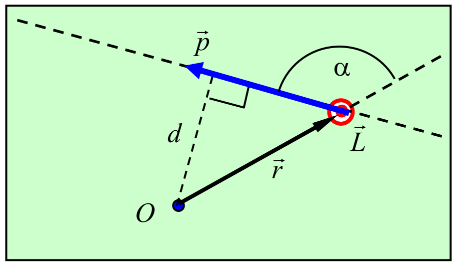
$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] \tag{2}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный из начала $O$ к материальной точке с импульсом $\vec{p}$ (рис.). Модуль вектора $\bar{L}$ равен

$$L = rp\sin\alpha = pd\,,$$

где $d = r\sin\alpha$ - плечо импульса – кратчайшее расстояние от «линии импульса» до начала $O$.




Величины $\vec{L}$ и $\vec{M}$ связаны **<u>уравнением моментов:</u>** Производная по времени от момента импульса материальной точки равна моменту результирующей силы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\quad, \tag{3}$$

где момент импульса и момент силы определены относительно одного начала $O$.

<u>Доказательство</u>:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{\upsilon}\vec{p}] + [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M}$$

(слагаемое $[\vec{\upsilon}\vec{p}] = 0$ в силу параллельности векторов $\vec{\upsilon}$ и $\vec{p}$ .).

**<u>Уравнение моментов для системы материальных точек.</u>** Производная по времени от момента импульса системы материальных точек равна суммарному моменту внешних сил

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш}, \tag{4}$$

Доказательство. Суммируя уравнение (3) по всем точкам системы получим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_{внутр\, i} + \sum \vec{M}_{внеш\, i} = \vec{M}_{внеш}.$$

Здесь учтено, что суммарный момент внутренних сил равен нулю. Это следует из третьего закона Ньютона. Существенно, что силы взаимодействия материальных точек не только равны по величине и противоположны по направлению, но и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки.

**Закон сохранения момента импульса**. Из уравнения (4) следует, что момент импульса замкнутой системы сохраняется.

Закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом, отражающим изотропность пространства, т. е. равноправие всех его направлений. Как и в случае законов сохранения импульса и энергии, действие закона сохранения момента импульса выходит за пределы ньютоновской механики, в рамках которой он был выведен.

**Момент импульса незамкнутой системы сохраняется**, если суммарный момент внешних сил $\vec{M}_{внеш}$ равен нулю.

# Поле тяготения

**Закон всемирного тяготения.** Две точечные массы $m_1$ и $m_2$, находящиеся на расстоянии $r$ друг от друга, притягиваются с силой тяготения (гравитационной силой), равной

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н • м$^2$/кг$^2$ — гравитационная постоянная. Сила тяготения — центральная сила, т.е. она действует вдоль линии, соединяющей частицы.

Силу, действующую на материальную точку массой $m$ в центральном поле тяготения (гравитационном поле), создаваемым неподвижной точечной массой $M$, можно записать в виде:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{или} \quad F_r(r) = -G\frac{mM}{r^2}.$$

Потенциальную энергию точки в центральном поле тяготения можно найти, используя соотношение между силой и потенциальной энергией:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Направив ось $X$ по радиусу, получим $F_r = -\dfrac{dU}{dr}$ или

$$-G\frac{mM}{r^2} = -\frac{dU}{dr}.$$

Отсюда находим

$$U = -G\frac{mM}{r} + const.$$

Константу обычно полагают равной нулю, т. е. принимают за нуль потенциальную энергию на бесконечности:

$$U = -G\frac{mM}{r}.$$

**Космические скорости.** Первой космической скоростью называют скорость движения по круговой орбите вблизи поверхности планеты. Она определяется из уравнения движения спутника

$$mg = \frac{m\upsilon_1^2}{R}$$

и равна $\upsilon_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{GM/R}$, где $M$ - масса планеты (для Земли $\upsilon_1 \approx$ 7,9 км/с.).

*Вторая космическая скорость* — минимальная скорость, которую надо сообщить телу на поверхности планеты, чтобы оно преодолело силу тяготения и ушло на бесконечность. Из закона сохранения энергии

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - G\frac{mM}{R} = \frac{m\upsilon_\infty^2}{2} \geq 0,$$

где $\upsilon_\infty$ - скорость на бесконечности, получим для второй космической скорости

$\upsilon_2 = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2gR} = \upsilon_1\sqrt{2}$ (для Земли $\upsilon_2 \approx 11{,}2$ км/с).

**Законы Кеплера**. В начале 17 века немецкий математик и астроном Иоганн Кеплер на основе астрономических наблюдений эмпирически установил три закона движения планет вокруг Солнца.

**Первый закон Кеплера.** Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

При скорости, превышающей вторую космическую, движение происходит по гиперболе.

**Второй закон Кеплера.** За равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, заметает равные площади. Этот закон относится к любому центральному полю и является прямым следствием закона сохранения момента импульса.

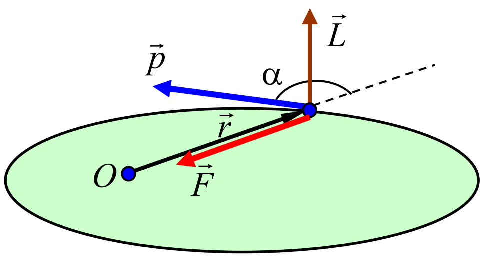
**Третий закон Кеплера.** Квадраты периодов движения планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Законы Кеплера могут быть выведены из законов Ньютона и справедливы для любого центрального гравитационного поля. Приведем вывод второго закона Кеплера, который является прямым следствием закона сохранения момента импульса.

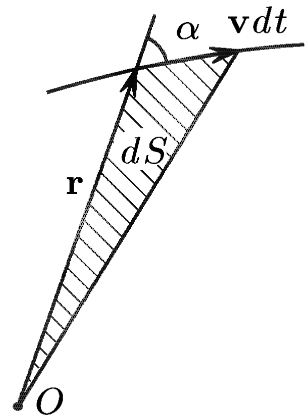
**Вывод второго закона Кеплера.**

Рассмотрим движение частицы-спутника массы $m$ вблизи неподвижного силового центра, например, Солнца, Земли или другой планеты. Гравитационное поле является центральным: на частицу действует сила, направленная к силовому центру центру $O$. Поэтому момент этой силы относительно центра тождественно равен нулю:



$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = 0, \quad \text{т.к } \sin\alpha = 0.$$

Следовательно, вектор момента импульса $\vec{L}$ относительно центра $O$ сохраняется. Из формулы $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$ следует, что векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$ лежат в плоскости, перпендикулярной постоянному вектору $\vec{L}$, следовательно, движение происходит в одной плоскости (рис.) и при движении сохраняется величина $L = m\upsilon r \sin\alpha$. Эта величина пропорциональна скорости «заметания» площади радиусом-вектором $\vec{r}$:




$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{r(\upsilon dt)\sin\alpha}{dt} = \frac{L}{2m}$$

(рис.), так что утверждение о сохранении момента импульса при движении в центральном поле эквивалентно второму закону Кеплера.

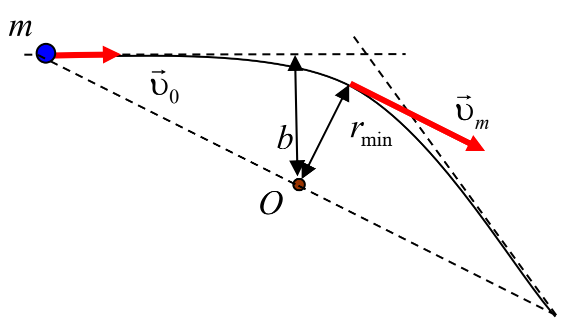
Комп. демонстрация

**Рассеяние частицы на силовом центре. Прицельный параметр**. Пусть частица массы $m$ издалека приближается к силовому центру со скоростью $\upsilon_0$. Расстояние от центра поля до линии движения удаленной частицы называется прицельным параметром $b$ (рис). Момент импульса частицы в центральном поле сохраняется и может быть легко вычислен, когда частица находится на большом расстоянии от центра и на минимальном расстоянии:

$$L = m\upsilon_0 r \sin\alpha = m\upsilon_0 b,$$

$$L = m\upsilon_m r_{\min},$$

где $\upsilon_m$ - скорость частицы на минимальном расстоянии $r_{\min}$ от силового центра. Отсюда получаем простое и важное соотношение:




$$\upsilon_0 b = \upsilon_m r_{\min}.$$

Если записать еще закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2 + E_p(r_{\min}),$$

то по известным $\upsilon_0$ и $b$ можно вычислить $r_{\min}$ и $\upsilon_m$. Комп. демонстрация

## Момент силы и момент импульса относительно оси

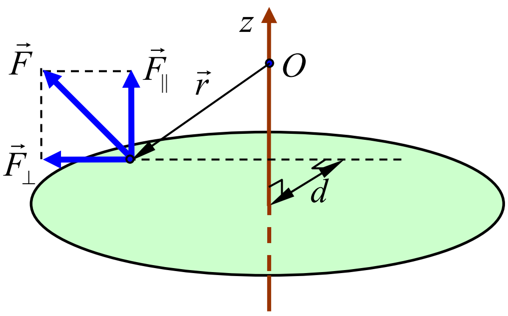
Векторные величины $\vec{L}$ и $\vec{M}$ не очень наглядны: векторы $\vec{r}$, $\vec{p}$, $\vec{F}$, $\vec{M}$, $\vec{L}$ по-разному ориентированы в пространстве. Заметно проще ведут себя проекции векторов $\vec{M}$ и $\vec{L}$ на некоторую ось $z$. При этом вместо (4) имеем скалярное уравнение

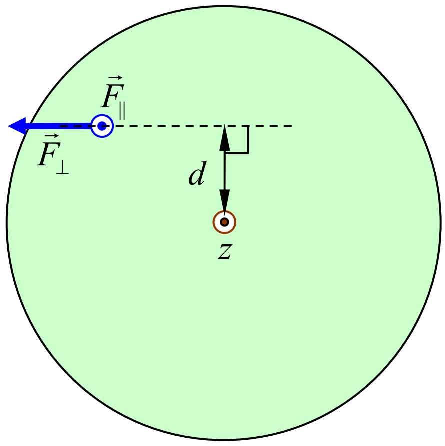
$$\frac{dL_z}{dt} = M_z .$$

Проекции $M_z$ и $L_z$ называются **моментом силы и моментом импульса относительно оси** $z$. Эти величины зависят только от составляющих силы и импульса, которые перпендикулярны оси $z$. Так

$$M_z = \pm F_{\perp} d \ , \tag{5}$$

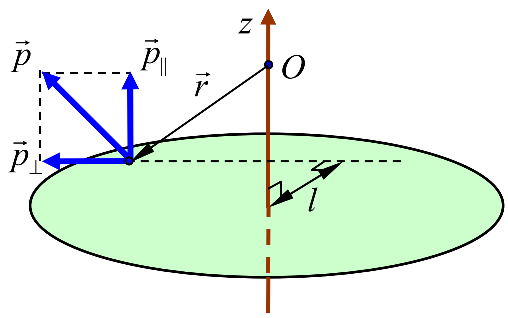
где $d$ - плечо силы $\vec{F}_{\perp}$ - кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси $z$ (рис). Знак «$+$» берем в формуле, когда сила $\vec{F}_{\perp}$ и направление оси $z$ связаны правилом винта.

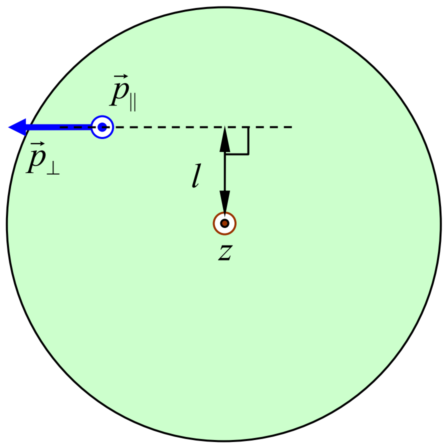



Аналогично момент импульса относительно оси равен произведению импульса $p_{\perp}$ на плечо $l$ (рис.):

$$L_z = p_{\perp} l . \tag{6}$$




Докажем формулу (5):

Разложим вектор силы на две составляющие:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel} ,$$

где $\vec{F}_{\perp}$ - перпендикулярна оси $z$, а $\vec{F}_{\parallel}$ - параллельна этой оси. Направим ось $x$ вдоль вектора $\vec{F}_{\perp}$. Распишем векторное произведение

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 ,$$

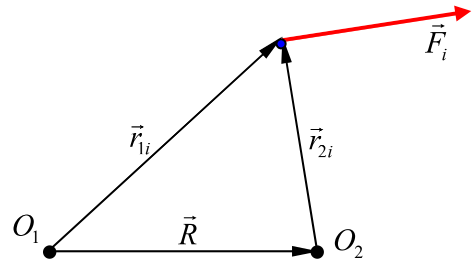
где $\vec{M}_1 = [\vec{r}\vec{F}_\perp]$, $\vec{M}_2 = [\vec{r}\vec{F}_\parallel]$. Далее:

$$\vec{M}_1 = [\vec{r}\vec{F}_\perp] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & F_\parallel \end{vmatrix}, \qquad \vec{M}_2 = [\vec{r}\vec{F}_\parallel] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_\perp & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из этих формул видно, что $M_{1z} = 0$, $M_{2z} = -yF_\perp$. Следовательно, $M_z = -yF_\perp = \pm F_\perp d$.

Докажем две важные теоремы:

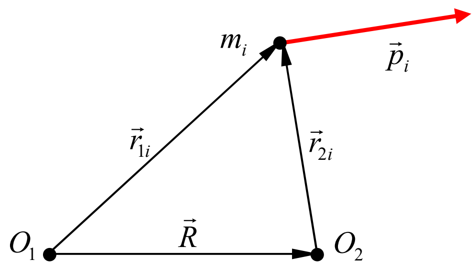
1) Если сумма сил равна нулю, то суммарный момент этих сил не зависит от выбора начала *O*.




Доказательство: Рассмотрим два начала $O_1$ и $O_2$ (см. рис). Тогда

$$\vec{M}_1 = \sum[\vec{r}_{1i}\vec{F}_i] = \sum[(\vec{R} + \vec{r}_{2i})\vec{F}_i] =$$
$$= [\vec{R}\sum \vec{F}_i] + \sum[\vec{r}_{2i}\vec{F}_i] = \sum[\vec{r}_{2i}\vec{F}_i] = \vec{M}_2$$

2). Если импульс системы равен нулю, то момент импульса $\vec{L}$ не зависит от выбора начала *O*.




Доказательство. Рассмотрим два начала $O_1$ и $O_2$. Пусть вектор $\vec{R}$ проведен от $O_1$ к $O_2$. Тогда $\vec{r}_{1i} = \vec{R} + \vec{r}_{2i}$ и

$$\vec{L}_1 = \sum[(\vec{R} + \vec{r}_{2i})\vec{p}_i] = [\vec{R}\sum \vec{p}_i] + \sum[\vec{r}_{2i}\vec{p}_i] = \sum[\vec{r}_{2i}\vec{p}_i] = \vec{L}_2$$

Введем понятие равнодействующей силы – это сила, равная векторной сумме нескольких сил и приложенная таким образом, что ее момент относительно любого начала равен суммарному моменту этих сил.

**Пример.** Суммарный момент сил тяжести, действующих на точки системы равен:

$$\vec{M} = \sum\left[\vec{r}_i m_i \vec{g}\right] = \left[\sum \vec{r}_i m_i \vec{g}\right] = \left[\vec{r}_c m\vec{g}\right],$$

где $m$ - масса системы, $\vec{r}_c$ -радиус вектор центра масс. Видно, что равнодействующая сил тяжести проходит через центр масс системы.