Вынужденные электрические колебания. Переменный ток

Рассмотрим электрические колебания, возникающие в том случае, когда в цепи имеется генератор, электродвижущая сила которого изменяется периодически. Далее мы ограничимся изучением электрических цепей с сосредоточенными емкостями и индуктивностями и будем считать переменные токи квазистационарными. Квазистационарность означает, что *мгновенные* значения силы тока i практически одинаковы во всех участках последовательной цепи. Это условие будет выполнено, если за время прохождения сигнала по цепи $\tau = l/c$ (l -длина цепи, c - скорость света) сила тока меняется незначительно ($\tau << T$, где T - период колебаний). Если принять l = 1 м, то токи можно считать квазистационарными при частотах $f = 1/T << c/l =$ 300 МГц.

Будем рассматривать только такие токи, которые изменяются по синусоидальному закону. Это объясняется несколькими причинами. Во-первых, многие технические генераторы переменного тока имеют ЭДС, изменяющуюся по закону, близкому к синусоидальному, и потому создаваемые ими токи практически являются синусоидальными. Во-вторых, теория синусоидальных токов особенно проста, и поэтому на примере таких токов можно легко выяснить основные особенности электрических колебаний. В-третьих, согласно известной математической теореме Фурье всякая функция $f(t)$ довольно общего вида может быть представлена в виде суммы синусоидальных функций. Поэтому теория синусоидального тока позволяет получать важные результаты и для тока, изменяющегося во времени по произвольному (несинусоидальному) закону.

Наконец, везде, где это не отмечено особо, будем считать, что колебания являются установившимися. Иными словами, будем предполагать, что с момента начала колебаний прошло достаточно большое время, так что *амплитуды* тока и напряжения уже достигли своих постоянных значений и далее не изменяются.

Резистор в цепи переменного тока

Рассмотрим сначала частный случай, когда генератор переменного тока замкнут на внешнюю цепь, имеющую настолько малые индуктивность и емкость, что ими можно пренебречь. Предположим, что в цепи имеется переменный ток

$$i = I_m \cos \omega t ,$$

(i - мгновенное значение силы тока, I_m - амплитуда тока, ω - циклическая частота) и найдем, по какому закону изменяется напряжение между концами цепи a и b (рис.1) . Применяя к участку aRb закон Ома, получим

$$u = iR = I_m R \cos \omega t .$$

Таким образом, напряжение на концах участка цепи зависит от времени также по закону косинуса, причем разность фаз между колебаниями тока и напряжения равна нулю (их колебания происходят синфазно): напряжение и ток одновременно достигают максимальных значений и одновременно обращаются в нуль (рис.2). Максимальное значение напряжения есть

$$U_m = I_m R .$$

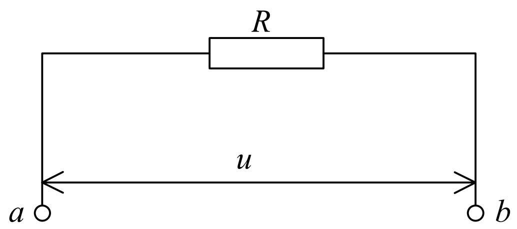

Рис.1. Резистор в цепи переменного тока

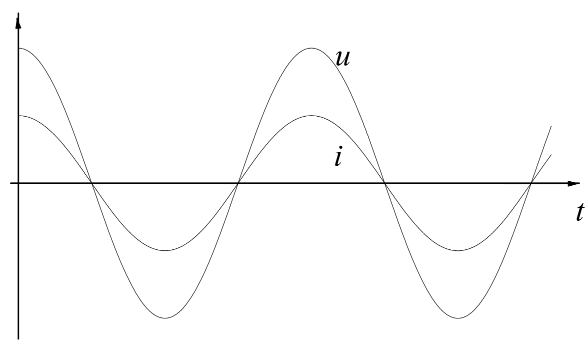

Рис.2. Зависимости тока через резистор и напряжения от времени

Рассмотрим теперь, чему равна работа, совершаемая в цепи. В течение малого промежутка времени переменный ток можно рассматривать как постоянный, и поэтому мгновенная мощность переменного тока

$$P(t) = iu = I_m U_m \cos^2 \omega t\,.$$

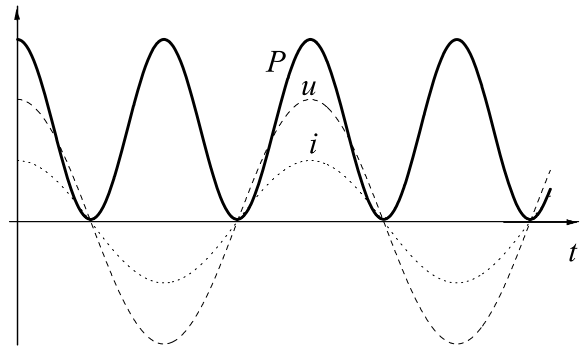

Рис.3. Зависимости тока через резистор , напряжения и мгновенной мощности от времени

Изменение мгновенной мощности с течением времени изображено на рис.3. Здесь же даны кривые колебаний тока i и напряжения u. Обычно необходимо знать не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за большой промежуток времени, охватывающий много периодов колебаний. Так как мы имеем дело с периодическим процессом, то для нахождения этого среднего значения достаточно, очевидно, вычислить среднее значение мощности за один полный период. Работа переменного тока за малое время dt есть

$$Pdt = I_m U_m \cos^2 \omega t\ dt\,,$$

а, следовательно, работа A за время полного периода колебаний T выражается формулой

$$A = I_m U_m \int_0^T \cos^2 \omega t\, dt\,.$$

Но

$$\int_0^T \cos^2 \omega t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \left(1 + \cos(2\omega t)\right)dt = \frac{1}{2}T\,.$$

Поэтому $A = I_m U_m T / 2$. Отсюда для средней мощности получаем

$$P_{cp} = \frac{A}{T} = \frac{I_m U_m}{2}\,.$$

Так как $U_m = RI_m$, то можно также записать

$$P_{ср} = \frac{1}{2} I_m U_m = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{U_m^2}{2R} \ .$$

Обозначим через $I_{эфф}$ и $U_{эфф}$ силу тока и напряжение постоянного тока, который выделяет в сопротивлении R то же количество теплоты, что и данный переменный ток. Тогда

$$P_{ср} = I_{эфф} U_{эфф} = R I_{эфф}^2 = \frac{U_{эфф}^2}{R} .$$

Сравнивая эти выражения с выражениями для мощности переменного тока, имеем

$$I_{эфф} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \qquad U_{эфф} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \ .$$

Величина $I_{эфф}$ называется эффективным (или действующим) значением силы переменного тока, а $U_{эфф}$ - эффективным значением напряжения. Пользуясь эффективными значениями, можно выразить среднюю мощность переменного тока теми же формулами, что и мощность постоянного тока.

Конденсатор в цепи переменного тока

Положим теперь, что участок цепи содержит конденсатор емкости *C*, причем сопротивлением и индуктивностью участка можно пренебречь, и посмотрим, по какому закону будет изменяться напряжение на концах участка в этом случае. Обозначим напряжение между точками *a* и *b* через *u* и будем считать заряд конденсатора *q* и силу тока *i* положительными, если они соответствуют рис.4. Тогда

$$u = \frac{q}{C}, \quad i = \frac{dq}{dt}$$

и, следовательно,

$$q = \int i dt \, .$$

Если сила тока в цепи изменяется по закону

$$i = I_m \cos \omega t \ , \qquad (1)$$

то заряд конденсатора равен

$$q = \int I_m \cos \omega t dt = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t + q_0 \ .$$

Постоянная интегрирования q_0 здесь обозначает произвольный постоянный заряд конденсатора, не связанный с колебаниями тока, и поэтому мы положим $q_0 = 0$. Следовательно,

$$u = \frac{I_m}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \qquad (2)$$

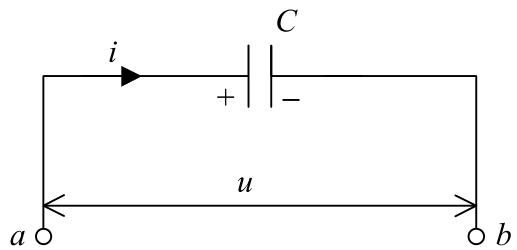

Рис.4. Конденсатор в цепи переменного тока

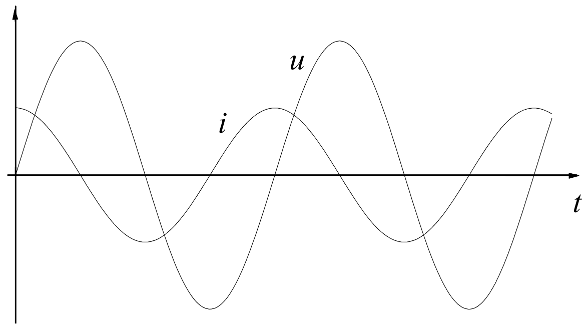

Рис.5. Зависимости тока через конденсатор и напряжения от времени

Сравнивая (1) и (2), мы видим, что при синусоидальных колебаниях тока в цепи напряжение на конденсаторе изменяется также по закону косинуса. Однако колебания напряжения на конденсаторе отстают по фазе от колебаний тока на $\pi/2$. Изменения тока и напряжения во времени изображены графически на рис.5. Полученный результат имеет простой физический смысл. Напряжение на конденсаторе в какой-либо момент времени определяется существующим зарядом конденсатора. Но этот заряд был образован током, протекавшим предварительно в более ранней стадии колебаний. Поэтому и колебания напряжения запаздывают относительно колебаний тока.

Формула (2) показывает, что амплитуда напряжения на конденсаторе равна

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m .$$

Сравнивая это выражение с законом Ома для участка цепи с постоянным током ($u = iR$), мы видим, что величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

играет роль сопротивления участка цепи, она получила название емкостного сопротивления. Емкостное сопротивление зависит от частоты ω, и при высоких частотах даже малые емкости могут представлять совсем небольшое сопротивление для переменного тока. *Важно отметить, что емкостное сопротивление определяет связь между амплитудными, а не мгновенными значениями тока и напряжения.*

Мгновенная мощность переменного тока

$$P = iu = I_m U_m \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} I_m U_m \sin 2\omega t$$

меняется со временем по синусоидальному закону с удвоенной частотой. В течение времени от 0 до $T/4$ мощность положительна, а в следующую четверть периода ток и напряжение имеют противоположные знаки и мощность становится отрицательной. Поскольку среднее значение за период колебаний величины $\sin 2\omega t$ равно нулю, то средняя мощность переменного тока на конденсаторе $P_{cp} = 0$.

Катушка индуктивности в цепи переменного тока

Рассмотрим, наконец, третий частный случай, когда участок цепи содержит только индуктивность. Обозначим по-прежнему через *U* напряжение между точками *а* и *б* и будем считать ток *I* положительным, если он направлен от *а* к *б* (рис.6). При наличии переменного тока в катушке индуктивности возникнет ЭДС самоиндукции, и поэтому мы должны применить закон Ома для участка цепи, содержащего эту ЭДС:

$$u = iR - \mathcal{E} \quad .$$

В нашем случае $R = 0$, а ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad .$$

Поэтому

$$u = L\frac{dI}{dt} \ . \qquad (3)$$

Если сила тока в цепи изменяется по закону

$$i = I_m \cos\omega t \ ,$$

то

$$u = -I_m \omega L \sin\omega t = I_m \omega L \cos(\omega t + \pi/2) \ . \qquad (4)$$

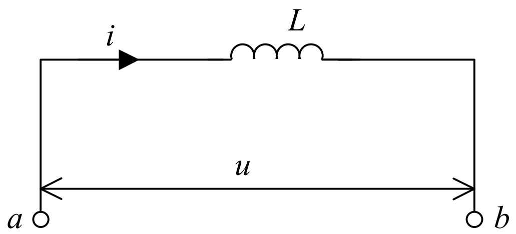

Рис.6. Катушка индуктивности в цепи переменного тока

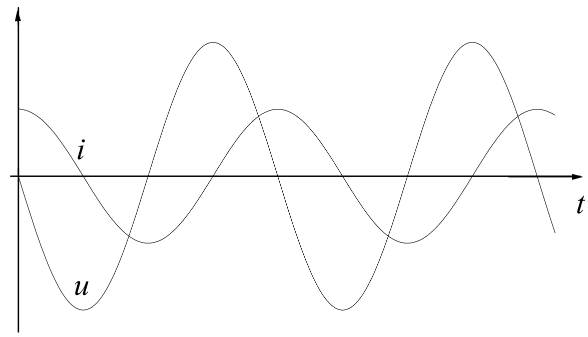

Рис.7. Зависимости тока через катушку индуктивности и напряжения от времени

Видно, что колебания напряжения на индуктивности опережают по фазе колебания тока на π/2. Когда сила тока, возрастая, проходит через нуль, напряжение уже достигает максимума, после чего начинает уменьшаться; когда сила тока становится максимальной, напряжение проходит через нуль, и т.д. (рис.7).

Из (4) следует, что амплитуда напряжения равна

$$U_m = I_m \omega L \ ,$$

и , следовательно, величина

$$X_L = \omega L$$

играет ту же роль, что сопротивление участка цепи. Поэтому X_L называют индуктивным сопротивлением. Индуктивное сопротивление пропорционально частоте переменного тока, и поэтому при очень больших частотах даже малые индуктивности могут представлять значительное сопротивление для переменных токов.

Мгновенная мощность переменного тока

$$P = iu = -I_m U_m \sin\omega t \cos\omega t = -\frac{1}{2} I_m U_m \sin 2\omega t$$

также, как и в случае идеальной емкости, меняется со временем по синусоидальному закону с удвоенной частотой. Очевидно, что средняя за период мощность равна нулю.

Таким образом, при протекании переменного тока через идеальные емкость и индуктивность обнаруживается ряд общих закономерностей:

1. Колебания тока и напряжения происходят в различных фазах - сдвиг по фазе между этими колебаниями равен $\pi/2$.

2. Амплитуда переменного напряжения на емкости (индуктивности) пропорциональна амплитуде протекающего через этот элемент переменного тока

$$U_m = XI_m$$

где X - реактивное (емкостное или индуктивное сопротивление). Важно иметь в виду, что это сопротивление связывает между собой не мгновенные значения тока и напряжения, а только их максимальные значения. Реактивное сопротивление отличается от омического (резистивного) сопротивления еще и тем, что оно зависит от частоты переменного тока.

3. На реактивном сопротивлении не рассеивается мощность (в среднем за период колебаний), это означает, что, например, через конденсатор может протекать переменный ток очень большой амплитуды, но тепловыделение на конденсаторе будет отсутствовать. Это является следствием фазового сдвига между колебаниями тока и напряжения на реактивных элементах цепи (индуктивности и емкости).

Резистивный элемент, который описывается в рассматриваемом частотном диапазоне законом Ома для *мгновенных* токов и напряжений

$$u(t) = i(t)R\ ,$$

называют омическим или активным сопротивлением. На активных сопротивлениях происходит выделение мощности.

Последовательное соединение резистора, конденсатора и катушки индуктивности

Пользуясь полученными выше результатами, можно найти соотношения между колебаниями тока и напряжения в любой цепи. Рассмотрим последовательное соединение резистора, конденсатора и катушки индуктивности (рис. 8.).

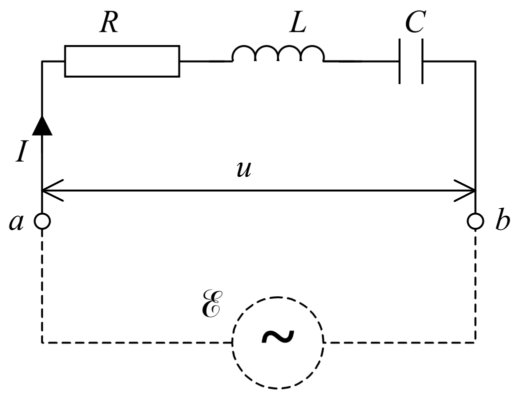

Рис.8. Последовательное соединение резистора, конденсатора и катушки индуктивности

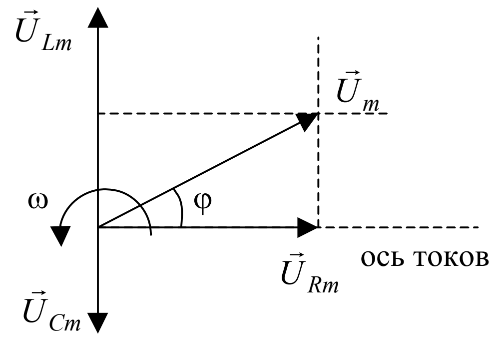

Рис.9. Векторная диаграмма

Положим по-прежнему, что ток в цепи изменяется по закону

$$i = I_m \cos\omega t,$$

и вычислим напряжение между концами цепи u. Так как при последовательном соединении проводников складываются напряжения, то искомое напряжение u есть сумма трех напряжений: на сопротивлении u_R, на емкости u_C и на индуктивности u_L, причем каждое из этих напряжений, как мы видели, изменяется со временем по закону косинуса:

$$u_R = I_m R \cos\omega t, \tag{5}$$

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t - \pi/2), \tag{6}$$

$$u_L = I_m \omega L \cos(\omega t + \pi/2). \tag{7}$$

Для сложения этих трех колебаний воспользуемся векторной диаграммой напряжений. Колебания напряжения на сопротивлении изображаются на ней вектором $\vec{U}_{Rm}$, направленным вдоль оси токов и имеющим длину $\left|\vec{U}_{Rm}\right| = I_m R$, колебания же напряжений на емкости и индуктивности - векторами $\vec{U}_{Cm}$ и $\vec{U}_{Lm}$, перпендикулярными к оси токов, с длинами ($I_m/\omega C$) и ($I_m\omega L$) (рис.9.). Представим себе, что эти векторы вращаются против часовой стрелки вокруг общего начала с угловой скоростью ω. Тогда проекции на ось токов векторов $\vec{U}_{Rm}$, $\vec{U}_{Cm}$ и $\vec{U}_{Lm}$, будут описываться соответственно формулами (5)-(7). Очевидно, что проекция на ось токов суммарного вектора

$$\vec{U}_m = \vec{U}_{Rm} + \vec{U}_{Cm} + \vec{U}_{Lm}$$

равна сумме $u_R + u_C + u_L$, то есть равна общему напряжению на участке цепи. Максимальное значение этого напряжения равно модулю вектора $\vec{U}_m$. Эта величина легко определяется геометрически. Сначала целесообразно найти модуль вектора $\vec{U}_{Cm} + \vec{U}_{Lm}$:

$$\left|\vec{U}_{Cm} + \vec{U}_{Lm}\right| = \left|\frac{I_m}{\omega C} - I_m \omega L\right|,$$

а затем по теореме Пифагора:

$$U_m = \left|\vec{U}_m\right| = I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}. \tag{8}$$

Из рисунка также видно, что

$$tg\ \varphi = \frac{\omega L - (1/\omega C)}{R}. \tag{9}$$

Для напряжения на участке цепи можно записать

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где амплитуда напряжения и фазовый сдвиг между током и напряжением определяются формулами (8), (9). Если $\omega L > (1/\omega C)$, то напряжение по фазе опережает ток, в противном случае - напряжение отстает по фазе.

Формула (8) имеет сходство с законом Ома в том смысле, что амплитуда напряжения пропорциональна амплитуде тока. Поэтому ее иногда называют законом Ома для переменного тока. Однако нужно помнить, что эта формула относится только к амплитудам, но не к мгновенным значениям $u(t)$ и $i(t)$. Величину

$$R_П = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

называют сопротивлением цепи для переменного тока, величину

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

называют реактивным сопротивлением цепи, а величину R - активным сопротивлением.

Полученные формулы справедливы и для замкнутой цепи, включающей в себя генератор переменного напряжения, если под R, C и L понимать их значения для всей цепи (например R представляет собой суммарное активное сопротивление цепи, включая и внутреннее сопротивление генератора). В этом случае во всех формулах следует заменить u на ЭДС генератора. Действительно, для всех наших рассуждений было безразлично, в каком именно месте сосредоточены емкость, индуктивность и сопротивление, поэтому в замкнутой цепи (рис.8) мы можем считать, что R представляет собой суммарное активное сопротивление цепи, включая и внутреннее сопротивление генератора, а C и L - емкость и индуктивность цепи, и заменить реальный генератор воображаемым, у которого внутреннее сопротивление равно нулю. При этом напряжение u между точками a и b будет равно ЭДС генератора $\mathcal{E}$. Отсюда следует, что формулы (8), (9) справедливы и для замкнутой цепи переменного тока, если под R, C, и L понимать их значения для всей цепи и заменить во всех формулах u на ЭДС генератора $\mathcal{E}$.

Резонанс напряжений

Положим, что в цепи, содержащей последовательно соединенные емкость C, индуктивность L и обладающей активным сопротивлением R, действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos\omega t .$$

Тогда согласно сказанному в предыдущем разделе, в цепи будет протекать переменный ток

$$i = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

амплитуда которого I_m связана с амплитудой ЭДС $\mathcal{E}_m$ законом Ома для переменного тока

$$I_m = \mathcal{E}_m / R_{\Pi}, \tag{10}$$

где R_{Π} - есть сопротивление всей цепи:

$$R_{\Pi} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}, \tag{11}$$

а фазовый угол φ, на который колебания тока отстают от колебаний напряжения, определяется формулой (9).

Допустим теперь, что мы изменяем частоту колебаний ω. Как показывают формулы (9)-(11), это вызовет изменение и амплитуды тока I_m, и сдвига фазы φ.

Остановимся сначала на изменениях амплитуды тока. Если $\omega = 0$, то $1/\omega C \to \infty$. Тогда сопротивление цепи R_{Π} обращается в бесконечность и $I_m = 0$. Это и понятно, так как при $\omega = 0$ мы имеем постоянный ток, а постоянный ток не проходит через конденсатор. При увеличении ω квадрат реактивного сопротивления $(\omega L - 1/\omega C)^2$ сначала уменьшается. Поэтому и сопротивление R_{Π} уменьшается, а I_m увеличивается. При частоте $\omega = \omega_0$, определяемой условием

$$\omega_0^2 = 1/LC, \tag{12}$$

реактивное сопротивление $(\omega L - 1/\omega C)$ обращается в нуль, а сопротивление цепи становится наименьшим, равным активному сопротивлению цепи. Сила тока достигает при этом максимума. При $\omega > \omega_0$ квадрат реактивного сопротивления снова не равен нулю и увеличивается с возрастанием ω. В соответствии с этим сопротивление $R_П$ увеличивается, а амплитуда тока I_m уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю при увеличении ω.

Зависимость I_m от ω, выражаемая формулами (10), (11) приведена на рис.10, где показаны две кривые, соответствующие различным значениям активного сопротивления R. Чем меньше R, тем выше и острее максимумы кривых.

Обратимся теперь к к сдвигу фаз между током и ЭДС. Из (9) видно, что при очень малых частотах, когда $\omega L << 1/\omega C$, $tg\,\varphi$ очень велик и отрицателен, и, следовательно, $\varphi \approx -\pi/2$. В этом случае ток опережает напряжение и цепь имеет емкостной характер. При возрастании частоты ω реактивное сопротивление $(\omega L - 1/\omega C)$, оставаясь отрицательным, уменьшается по абсолютной величине и разность фаз φ уменьшается. Когда $\omega = \omega_0$, формула (9) дает $tg\,\varphi = 0$, а значит, $\varphi = 0$. При дальнейшем увеличении ω реактивное сопротивление становится положительным и увеличивается с возрастанием ω. Следовательно, при $\omega > \omega_0$ ток отстает от напряжения и цепь приобретает индуктивный характер, причем угол φ асимптотически стремится к предельному значению $+\pi/2$ при увеличении частоты ω.

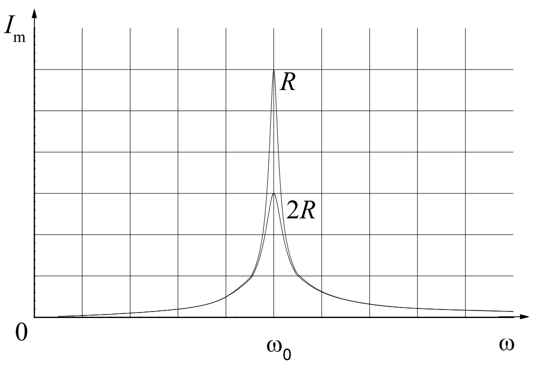

Рис.10. Амплитудно-частотная зависимость

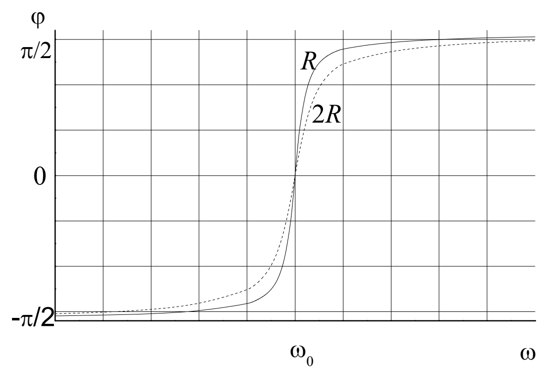

Рис.11. Фазово-частотная зависимость

Зависимость сдвига фаз от частоты колебаний изображена графически на рис. 11. Также, как и I_m, фазовый сдвиг зависит от активного сопротивления контура R. Чем меньше R, тем быстрее изменяется φ вблизи $\omega = \omega_0$, и в предельном случае $R = 0$ изменение фазы приобретает скачкообразный характер.

Резюмируя сказанное, мы видим, что особым является случай, когда частота ЭДС генератора (или приложенного внешнего напряжения) ω равна частоте ω_0. При этом амплитуда тока достигает максимального значения, а сдвиг фаз между током и напряжением равен нулю, или иными словами, контур действует как чисто активное сопротивление. Этот важный случай вынужденных колебаний называется резонансом напряжений.

Отметим, что частота ω_0, при которой наступает резонанс равна частоте собственных колебаний контура без активного сопротивления (без затухания).

Найдем теперь, чему равны амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе и фазовый сдвиг между этими колебаниями и колебаниями приложенного к контуру напряжения. Амплитуда напряжения на конденсаторе

$$U_{Cm} = I_m(1/\omega C) = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega C R_П} = \frac{\mathcal{E}_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}, \qquad (13)$$

где $\beta = R/2L$ - коэффициент затухания контура. Фазовый сдвиг φ_C между колебаниями напряжения на конденсаторе и колебаниями приложенной ЭДС, как следует из рис.9, равен

$$\varphi_C = \pi/2 + \varphi, \qquad tg\,\varphi_C = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (14)$$

Основные качественные особенности зависимостей $U_{Cm}(\omega)$ и $\varphi_C(\omega)$ приведены в теоретической части описания лабораторной работы "Вынужденные колебания в последовательном колебательном контуре".