7. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Собственные колебания

Гармоническими колебаниями материальной точки называется движение, при котором смещение x от положения устойчивого равновесия зависит от времени по закону

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Определение амплитуды смещения и начальной фазы колебаний смещения через начальное смещение и начальную скорость.

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2}; \qquad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega}{v_{x0}}.$$

7.1. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль координатной оси X около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $t = 0$ координата и проекция скорости равны $x_0 = 25$ см и $v_{x0} = 0$. Найдите координату x материальной точки для момента времени $t = 2{,}4$ с.

7.2. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль координатной оси X около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $t = 0$ координата и проекция скорости равны $x_0 = 0$ и $v_{x0} = 0{,}1$ м/с. Найдите координату x материальной точки для момента времени $t = 2{,}4$ с.

7.3. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль координатной оси X около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $t = 0$ координата и проекция скорости равны $x_0 = 25$ см и $v_{x0} = 0{,}1$ м/с. Найдите координату x материальной точки для момента времени $t = 2{,}4$ с.

7.4. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль координатной оси X около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $t = 0$ координата и проекция скорости равны $x_0 = 25$ см и $v_{x0} = 0$. Найдите проекцию скорости v_x материальной точки для момента времени $t = 2{,}4$ с.

7.5. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль координатной оси X около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $t = 0$ координата и проекция скорости равны $x_0 = 0$ и $v_{x0} = 0{,}1$ м/с. Найдите проекцию скорости v_x материальной точки для момента времени $t = 2{,}4$ с.

7.6. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль координатной оси X около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $t = 0$ координата и проекция скорости равны $x_0 = 25$ см и $v_{x0} = 0{,}1$ м/с. Найдите проекцию скорости v_x материальной точки для момента времени $t = 2{,}4$ с.

7.7. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль координатной оси X около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $t = 0$ координата и проекция скорости равны $x_0 = 25$ см и $v_{x0} = 0$. Найдите проекцию ускорения a_x материальной точки для момента времени $t = 2{,}4$ с.

7.8. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль координатной оси X около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $t = 0$ координата и проекция скорости равны $x_0 = 0$ и $v_{x0} = 0{,}1$ м/с. Найдите проекцию ускорения a_x материальной точки для момента времени $t = 2{,}4$ с.

7.9. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль координатной оси *X* около положения равновесия $x = 0$. Циклическая частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В начальный момент времени $t = 0$ координата и проекция скорости равны $x_0 = 25$ см и $v_{x0} = 0{,}1$ м/с. Найдите проекцию ускорения a_x материальной точки для момента времени $t = 2{,}4$ с.

7.10. Найдите зависимость от времени угла α отклонения от вертикали математического маятника длины $l = 0{,}8$ м, если в начальный момент маятник отклонили на угол $\alpha_0 = 3^0$ и отпустили без начальной скорости.

7.11. Найдите зависимость от времени угла α отклонения от вертикали математического маятника длины $l = 0{,}8$ м, если в начальный момент маятник находился в положении равновесия и его грузу сообщили горизонтальную начальную скорость $v_0 = 0{,}2$ м/с.

7.12. Найдите зависимость от времени угла α отклонения от вертикали математического маятника длины $l = 0{,}8$ м, если в начальный момент маятник отклонили на угол $\alpha_0 = 3^0$, и его грузу сообщили горизонтальную начальную скорость $v_0 = 0{,}2$ м/с, направленную к положению равновесия.

Определение частоты или периода колебаний смещения колеблющегося тела от положения устойчивого равновесия.

Сначала убеждаемся в том, что у рассматриваемого тела или системы тел имеется положение устойчивого равновесия. Для этого положения записываем условие статики. Далее используем уравнение движения или закон сохранения механической энергии. В итоге приходим к уравнению гармонического осциллятора

$$x'' + \omega^2 \cdot x = 0.$$

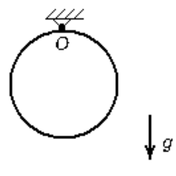
7.13. Неподвижное тело, подвешенное на пружине, увеличивает ее длину на $\Delta l = 0{,}07$ м. Считая, что масса пружины гораздо меньше массы тела, найдите период колебаний вертикального смещения тела от положения равновесия.

7.14. Диск массы 10 кг и радиусом 18 см плавает в воде. Диску сообщили небольшую вертикальную начальную скорость. Вычислите период малых колебаний смещения диска от положения равновесия. Сопротивлением воды движению диска пренебрегаем. Сосуд с водой считаем таким большим, что поверхность воды все время остается на одном горизонте.

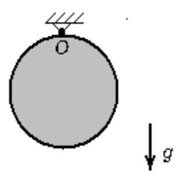
7.15. Однородный стержень длины *l* совершает малые колебания в поле сил тяжести вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и прходящей через его верхний конец. Пренебрегая трением, найдите период колебаний угла отклонения стержня от вертикали.

7.16. Массу физического маятника увеличили в два раза, а его момент инерции относительно точки подвеса уменьшили в два раза. Во сколько раз изменилась частота колебаний смещения маятника ?

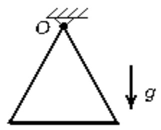
7.17. Кольцо радиуса *R* подвешено в поле сил тяжести в точке *O* и может без трения вращаться вокруг точки *O* в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения кольца от положения равновесия.



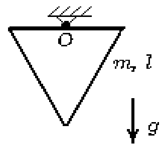
7.18. Диск радиуса *R* подвешен в поле сил тяжести в точке *O* и может без трения вращаться вокруг точки *O* в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения диска от положения равновесия.



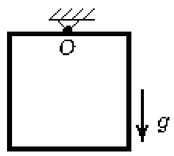
7.19. Три однородных одинаковых стержня длины l каждый, образуют треугольник, подвешенный в поле сил тяжести в точке O. Треугольник может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения треугольника от положения равновесия.



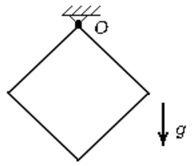
7.20. Три однородных одинаковых стержня длины l каждый, образуют треугольник, подвешенный в поле сил тяжести в точке O. Треугольник может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения треугольника от положения равновесия.



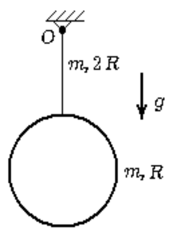
7.21. Четыре однородных одинаковых стержня длины l каждый, образуют квадрат, подвешенный в поле сил тяжести в точке O. Квадрат может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения квадрата от положения равновесия.



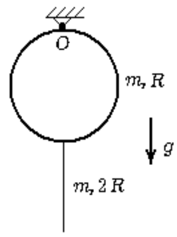
7.22. Четыре однородных одинаковых стержня длины l каждый, образуют квадрат, подвешенный в поле сил тяжести в точке O. Квадрат может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения квадрата от положения равновесия.



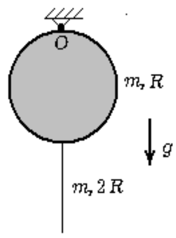
7.23. Кольцо массы m, радиуса R, прикрепленное к стержню, массы m, длины $2R$ подвешено в поле сил тяжести в точке O. Описанное твердое тело может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения тела от положения равновесия.



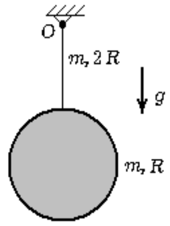
7.24. Кольцо массы m, радиуса R с прикрепленным к нему стержнем массы m, длины $2R$ подвешено в поле сил тяжести в точке O. Описанное твердое тело может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения тела от положения равновесия.



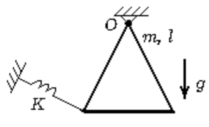
7.25. Диск массы m, радиуса R с прикрепленным к нему стержнем массы m, длины $2R$ подвешен в поле сил тяжести в точке O. Описанное твердое тело может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения тела от положения равновесия.



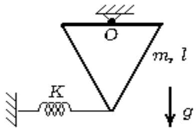
7.26. Диск массы m, радиуса R, прикрепленный к стержню, массы m, длины $2R$ подвешен в поле сил тяжести в точке O. Описанное твердое тело может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения тела от положения равновесия.



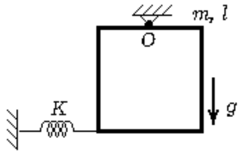
7.27. Три однородных стержня массы m и длины l каждый образуют треугольник, подвешенный в поле сил тяжести в точке O. Треугольник может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Одна из вершин треугольника прикреплена к стене легкой пружинкой жесткости k, как показано на рис. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения треугольника от положения равновесия.



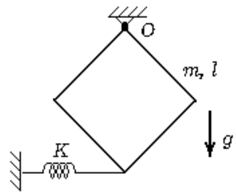
7.28. Три однородных стержня массы m и длины l каждый образуют треугольник, подвешенный в поле сил тяжести в точке O. Треугольник может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Одна из вершин треугольника прикреплена к стене легкой пружинкой жесткости k, как показано на рис. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения треугольника от положения равновесия.



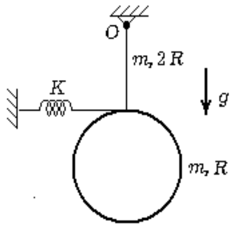
7.29. Четыре однородных стержня массы m и длины l каждый образуют квадрат, подвешенный в поле сил тяжести в точке O. Квадрат может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Одна из вершин квадрата прикреплена к стене легкой пружинкой жесткости k, как показано на рис. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения квадрата от положения равновесия.



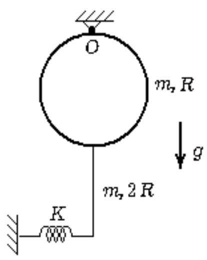
7.30. Четыре однородных стержня массы m и длины l каждый образуют квадрат, подвешенный в поле сил тяжести в точке O. Квадрат может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Одна из вершин квадрата прикреплена к стене легкой пружинкой жесткости k,как показано на рис. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения квадрата от положения равновесия.



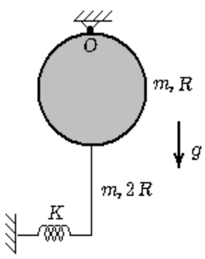
7.31. Кольцо массы m, радиуса R, прикрепленное к стержню, массы m, длины $2R$ подвешено в поле сил тяжести в точке O. Описанное твердое тело может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Тело прикреплено к стене легкой пружинкой жесткости k, как показано на рис. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения тела от положения равновесия.



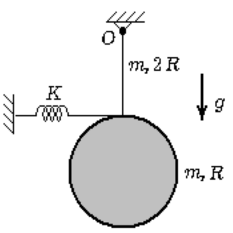
7.32. Кольцо массы m, радиуса R с прикрепленным к нему стержнем массы m, длины $2R$ подвешено в поле сил тяжести в точке O. Описанное твердое тело может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Тело прикреплено к стене легкой пружинкой жесткости k, как показано на рис. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения тела от положения равновесия.



7.33. Диск массы m, радиуса R с прикрепленным к нему стержнем массы m, длины $2R$ подвешен в поле сил тяжести в точке O. Описанное твердое тело может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Тело прикреплено к стене легкой пружинкой жесткости k, как показано на рис. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения тела от положения равновесия.



7.34. Диск массы m, радиуса R, прикрепленный к стержню, массы m, длины $2R$ подвешен в поле сил тяжести в точке O. Описанное твердое тело может без трения вращаться вокруг точки O в плоскости рисунка. Тело прикреплено к стене легкой пружинкой жесткости k, как показано на рис. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний смещения тела от положения равновесия.



Механическая энергия E гармонического осциллятора

$$A \cdot x^2 + B \cdot (x')^2 = E$$

сохраняется. Дифференцируя это равенство по времени, приходим к уравнению гармонического осциллятора

$$x'' + \omega^2 \cdot x = 0.$$

Здесь $\omega = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$.

При решении следующих задач полезно принять во внимание приближенные формулы

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm n \cdot x$$

$$e^x \approx 1 + x$$
$$e^{-x} \approx 1 - x\ ,$$

которые справедливы при условии $x \ll 1$.

7.35. Частица массы m находится в одномерном поле консервативных сил и потенциальная энергия ее взаимодействия с полем зависит от координаты x как $U(x) = U_0 \cdot (1 - \cos ax)$, где U_0 и a - положительные постоянные. Определите значение координаты $x*$, соответствующее положению устойчивого равновесия. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний частицы.

7.36. Частица массы m находится в одномерном поле консервативных сил и потенциальная энергия ее взаимодействия с полем зависит от координаты x как $U(x) = a / x^2 - b / x$, где a и b - положительные постоянные. Определите значение координаты $x*$, соответствующее положению устойчивого равновесия. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний частицы.

7.37. Частица массы m находится в одномерном поле консервативных сил и потенциальная энергия ее взаимодействия с полем зависит от координаты x как $U(x) = -2D \cdot \left(\dfrac{a}{x} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2}{x^2}\right)$ (потенциал Кратцера), где D и a - положительные постоянные. Определите значение координаты $x*$, соответствующее положению устойчивого равновесия. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний частицы.

7.38. Частица массы m находится в одномерном поле консервативных сил и потенциальная энергия ее взаимодействия с полем зависит от координаты x как $U(x) = D \cdot (\exp(-2ax) - 2 \cdot \exp(-ax))$ (потенциал Морзе), где D и a - положительные постоянные. Определите значение координаты $x*$, соответствующее положению устойчивого равновесия. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний частицы.

7.39. Частица массы m находится в одномерном поле консервативных сил и потенциальная энергия ее взаимодействия с полем зависит от координаты x как $U(x) = 4D \cdot \left(\left(\dfrac{a}{x}\right)^{12} - \left(\dfrac{a}{x}\right)^{6}\right)$ (потенциал Ленарда-Джонса), где D и a - положительные постоянные. Определите значение координаты $x*$, соответствующее положению устойчивого равновесия. Найдите циклическую частоту ω малых колебаний частицы.

Сложение гармонических колебаний методом векторных диаграмм.

Введем координатную ось *OX* и радиус-вектор длины x_m, который вращается вокруг точки $x = 0$ против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω. Тогда проекция этого радиус-вектора на координатную ось *OX* находится по формуле $x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, то есть совершает гармонические колебания. Здесь φ_0 - начальная фаза колебаний смещения x и, в тоже время, угол, который радиус-вектор на векторной диаграмме составляет с осью *OX* в начальный момент времени.

7.40. Изобразите на векторной диаграмме колебания $x = x_m \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$ для моментов времени $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{\pi}{2\omega}$.

7.41. Изобразите на векторной диаграмме колебания $x = -2b \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{6})$ для моментов времени $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{\pi}{2\omega}$. Постоянная $b > 0$.

7.42. Изобразите на векторной диаграмме для момента времени $t = 0$ колебания смещения $x = x_m \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$, проекции скорости $\dot{x}$ и проекции ускорения $\ddot{x}$.

Способ изображения колебаний с помощью векторной диаграммы выгодно использовать при сложении гармонических колебаний. Начнем со *сложения двух колебаний одинаковой частоты вдоль одного направления.* Уравнения слагаемых колебаний имеют вид

$$x_1 = x_{m1} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{01}),$$
$$x_2 = x_{m2} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{02}).$$

С помощью векторной диаграммы можно показать, что сумма этих колебаний представляет собой тоже гармоническое колебание частоты ω

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

причем амплитуда и начальная фаза колебания определяются формулами

$$x_m^2 = x_{m1}^2 + x_{m2}^2 + 2 \cdot x_{m1} \cdot x_{m2} \cdot \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}),$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_{m1} \cdot \sin \varphi_{01} + x_{m2} \cdot \sin \varphi_{02}}{x_{m1} \cdot \cos\varphi_{01} + x_{m2} \cdot \cos\varphi_{02}}.$$

7.43. С помощью векторной диаграммы найдите амплитуду x_m колебания, являющегося суммой двух колебаний

$$x_1 = 3 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$$
$$x_2 = 8 \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}).$$

7.44. С помощью векторной диаграммы найдите амплитуду x_m колебания, являющегося суммой трех колебаний

$$x_1 = 3 \cdot \cos(\omega t)$$
$$x_2 = 5 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$$
$$x_3 = 6 \cdot \sin(\omega t).$$

7.45. С помощью векторной диаграммы найдите амплитуду x_m колебания, являющегося суммой двух колебаний

$$x_1 = 3 \cdot \sin(\omega t)$$
$$x_2 = 3 \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}).$$

7.46. С помощью векторной диаграммы найдите амплитуду x_m колебания, являющегося суммой двух колебаний

$$x_1 = 3 \cdot \sin(\omega t)$$
$$x_2 = 3 \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{3}).$$

7.47. С помощью векторной диаграммы выберите из трех колебаний

$$x_1 = 2 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$x_2 = 2 \cdot \cos(\omega t + \frac{11\pi}{3})$$
$$x_3 = 2 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{14\pi}{3}\right)$$

пары таких, которые при сложении гасят друг друга.

7.48. С помощью векторной диаграммы выберите из трех колебаний

$$x_1 = 2 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$x_2 = 2 \cdot \cos(\omega t + \frac{11\pi}{3})$$
$$x_3 = 2 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{14\pi}{3}\right)$$

пары таких, которые при сложении формируют максимально возможную амплитуду и вычислите ее.

7.49. Складываются четыре колебания вдоль одной прямой с равными амплитудами, частотами и сдвигами фаз:
$\Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{23} = \Delta\varphi_{34} = \Delta\varphi_{41}$. Равна ли нулю амплитуда результирующего колебания при сдвиге фаз равном $\frac{\pi}{2}$?

7.50. Складываются четыре колебания вдоль одной прямой с равными амплитудами, частотами и сдвигами фаз:
$\Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{23} = \Delta\varphi_{34} = \Delta\varphi_{41}$. Равна ли нулю амплитуда результирующего колебания при сдвиге фаз равном π?

7.51. Складываются четыре колебания вдоль одной прямой с равными амплитудами, частотами и сдвигами фаз:
$\Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{23} = \Delta\varphi_{34} = \Delta\varphi_{41}$. Равна ли нулю амплитуда результирующего колебания при сдвиге фаз равном 2π?

Учитывая, что механическая энергия колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды смещения тела от положения равновесия, на основании соотношения

$$x_m^2 = x_{m1}^2 + x_{m2}^2 + 2 \cdot x_{m1} \cdot x_{m2} \cdot \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

приходим к выводу о том, что энергия результирующего колебания, вообще говоря, не равна сумме энергий слагаемых колебаний

$$E = E_1 + E_2 + 2 \cdot \sqrt{E_1 \cdot E_2} \cdot \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

В зависимости от разности начальных фаз $(\varphi_{02} - \varphi_{01})$ слагаемых колебаний, энергия результирующего колебания получается либо больше, либо меньше, чем сумма энергий слагаемых колебаний – это интерференция колебаний. Разумеется, при $\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 0$, получаем $E = E_1 + E_2$.

7.52. Тело колеблется вдоль координатной оси с некоторой амплитудой смещения и частотой. В тоже время сама координатная ось колеблется относительно лабoратрии с такой же амплитудой смещения и частотой вдоль того же направления. Энергия колебаний тела отнсительно оси равна 5 Дж. Энергия колебаний тела вместе с осью (тело в этом случае покоится относительно оси) тоже равна 5 Дж. Вычислите энергию колебаний тела, участвующего сразу в двух упомянутых движениях, в лабораторной системе отсчета, если разность начальных фаз колебаний равна нулю.

7.53. Тело колеблется вдоль координатной оси с некоторой амплитудой смещения и частотой. В тоже время сама координатная ось колеблется относительно лабoратрии с такой же амплитудой смещения и частотой вдоль того же направления. Энергия колебаний тела отнсительно оси равна 5 Дж. Энергия колебаний тела вместе с осью (тело в этом случае покоится относительно оси) тоже равна 5 Дж. Вычислите энергию колебаний тела, участвующего сразу в двух упомянутых движениях, в лабораторной системе отсчета, если разность начальных фаз колебаний равна 90^0.

7.54. Тело колеблется вдоль координатной оси с некоторой амплитудой смещения и частотой. В тоже время сама координатная ось колеблется относительно лабoратрии с такой же амплитудой смещения и частотой вдоль того же направления. Энергия колебаний тела отнсительно оси равна 5 Дж. Энергия колебаний тела вместе с осью (тело в этом случае покоится относительно оси) тоже равна 5 Дж. Вычислите энергию колебаний тела, участвующего сразу в двух упомянутых движениях, в лабораторной системе отсчета, если разность начальных фаз колебаний равна 180^0.

7.55. Тело колеблется вдоль координатной оси с некоторой амплитудой смещения и частотой. В тоже время сама координатная ось колеблется относительно лабoратрии с такой же амплитудой смещения и частотой вдоль того же направления. Энергия колебаний тела отнсительно оси равна 5 Дж. Энергия колебаний тела вместе с осью (тело в этом случае покоится относительно оси) тоже равна 5 Дж. Вычислите энергию колебаний тела, участвующего сразу в двух упомянутых движениях, в лабораторной системе отсчета, если разность начальных фаз колебаний равна 270^0.

7.56. Тело колеблется вдоль координатной оси с некоторой амплитудой смещения и частотой. В тоже время сама координатная ось колеблется относительно лабoратрии с такой же амплитудой смещения и частотой вдоль того же направления. Энергия колебаний тела отнсительно оси равна 5 Дж. Энергия колебаний тела вместе с осью (тело в этом случае покоится относительно оси) тоже равна 5 Дж. Вычислите энергию колебаний тела, участвующего сразу в двух упомянутых движениях, в лабораторной системе отсчета, если разность начальных фаз колебаний равна 360^0.

Сложение колебаний одного направления, одинаковой амплитуды со слабо отличающимися частотами - биения.

Сложим два колебания одного направления с одинаковыми амплитудами и разными частотами

$$x_1 = x_m \cdot \cos(\omega_1 t)$$

$$x_2 = x_m \cdot \cos(\omega_2 t).$$

В результате получим

$$x = x_m \cdot 2 \cdot \cos\frac{(\omega_1 + \omega_2) \cdot t}{2} \cdot \cos\frac{(\omega_1 - \omega_2) \cdot t}{2}.$$

В приближении

$$\omega_1 - \omega_2 << \omega_1, \omega_2$$

с учетом обозначений

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\omega_{\text{á}} = \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$T_{\text{á}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{á}}}$$

получим

$$x = 2x_m \cdot \cos\left(\frac{\omega_{\text{á}} \cdot t}{2}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

7.57. При сложении двух гармонических колебаний одного направления результирующее колебание смещения материальной точки от положения равновесия имеет вид

$$x = a \cdot \cos(2{,}1 \cdot t) \cdot \cos(50 \cdot t).$$

Найдите циклические частоты ω_1 и ω_2 складываемых колебаний и период биений $T_{\text{á}}$.

7.58. Линейные частоты двух слагаемых колебаний одного направления равны

$\nu_1 = 101$ Гц и $\nu_2 = 100$ Гц.

Сколько полных колебаний *N* совершает материальная точка за один период биений?

Сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Фигуры Лиссажу.

Материальная точка гармонически колеблется с одинаковой частотой одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y*:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Найдем уравнение траектории этой точки, то есть уравнение результирующего движения. С этой целью перепишем уравнения гармонических колебаний в виде:

$$\frac{x}{x_m} = \cos(\omega t + \varphi_1) = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_1 - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_1$$

$$\frac{y}{y_m} = \cos(\omega t + \varphi_2) = \cos\omega t \cdot \cos\varphi_2 - \sin\omega t \cdot \sin\varphi_2$$

Домножим первую формулу на $\cos\varphi_2$, а вторую - на $\cos\varphi_1$, и найдем квадрат разности полученных конструкций

$$\left(\frac{x}{x_m} \cdot \cos\varphi_2 - \frac{y}{y_m}\cos\varphi_1\right)^2 = \sin^2\omega t \cdot (\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)^2 = \sin^2\omega t \cdot \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Аналогично убеждаемся в справедливости еще одного равенства

$$\left(\frac{y}{y_m} \cdot \sin\varphi_1 - \frac{x}{x_m}\sin\varphi_2\right)^2 = \cos^2\omega t \cdot (\cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1 - \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)^2 = \cos^2\omega t \cdot \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Возводя левые скобки в квадрат, и складывая два последних равенства, находим окончательно

$$\left(\frac{x}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_m}\right)^2 - \frac{2xy}{x_m y_m} \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Эта формула представляет собой уравнение эллипса, оси которого наклонены относительно координатных осей. При разности фаз $(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\pi}{2}$ формула принимает знакомый вид:

$$\left(\frac{x}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_m}\right)^2 = 1.$$

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одной частоты, энергия результирующего движения равна сумме энергий слагаемых движений и не зависит от разности начальных фаз $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Поэтому можно сказать, что взаимно перпендикулярные колебания не интерферируют.

Действительно, для энергии колебаний вдоль каждой оси имеем:

$$E_X = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$E_Y = \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{ky^2}{2}.$$

Сумма этих энергий равна

$$E_X + E_Y = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2} = E.$$

Материальная точка гармонически колеблется одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y* с разными частотами и начальными фазами:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Траектория этой точки, или график зависимости $y(x)$, в общем случае, оказывается даже незамкнутой кривой и результирующее движение, следовательно, не является периодическим. Однако, если отношение частот ω_1 / ω_2 кратно целому числу, то траектория оказывается замкнутой и движение является периодическим (хотя, возможно, очень сложным). Траектории такого типа, получающиеся в плоскости *X*,*Y*, называют фигурами Лиссажу.

7.59. Материальная точка гармонически колеблется одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y* с одинаковыми частотами и начальными фазами:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Полагая, что $y_m = 2 \cdot x_m$, изобразите на плоскости *X*,*Y*, соответствующую фигуру Лиссажу.

7.60. Материальная точка гармонически колеблется одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y* с одинаковыми частотами и разными начальными фазами:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

Полагая, что $y_m = x_m$, изобразите на плоскости *X*,*Y*, соответствующую фигуру Лиссажу.

7.61. Материальная точка гармонически колеблется одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y* с одинаковыми частотами и разными начальными фазами:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

Полагая, что $y_m = x_m$, изобразите на плоскости *X*,*Y*, соответствующую фигуру Лиссажу.

7.62. Материальная точка гармонически колеблется одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y* с одинаковыми частотами и разными начальными фазами:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

Полагая, что $y_m = 2 \cdot x_m$, изобразите на плоскости *X*,*Y*, соответствующую фигуру Лиссажу.

7.63. Материальная точка гармонически колеблется одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y* с одинаковыми частотами и разными начальными фазами:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

Полагая, что $y_m = 2 \cdot x_m$, изобразите на плоскости *X*,*Y*, соответствующую фигуру Лиссажу.

7.64. Материальная точка гармонически колеблется одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y* с одинаковыми частотами и разными начальными фазами:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{4}).$$

Полагая, что $y_m = 2 \cdot x_m$, изобразите на плоскости *X*,*Y*, соответствующую фигуру Лиссажу.

7.65. Материальная точка гармонически колеблется одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y* с одинаковыми частотами и разными начальными фазами:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{4}).$$

Полагая, что $y_m = 2 \cdot x_m$, изобразите на плоскости *X*,*Y*, соответствующую фигуру Лиссажу.

7.66. Материальная точка гармонически колеблется одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y* с разными частотами и начальными фазами:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Полагая, что $y_m = x_m$, $\omega_2 = 2 \cdot \omega_1$ и $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{4}$ изобразите на плоскости *X*,*Y*, соответствующую фигуру Лиссажу.

7.67. Материальная точка гармонически колеблется одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях *X* и *Y* с разными частотами и начальными фазами:

$$x = x_m \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y = y_m \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Полагая, что $y_m = x_m$, $\omega_1 = 2 \cdot \omega_2$ и $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{4}$ изобразите на плоскости *X*,*Y*, соответствующую фигуру Лиссажу.

Затухающие колебания

Уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 .$$

Здесь

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\beta = \frac{b}{m} .$$

Решение уравнения $x(t) = x_m(t)\cdot\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Амплитуда затухающих колебаний $x_m(t) = x_{m0}\cdot e^{-\beta t}$. Коэффициент затухания β и циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Время релаксации $\tau = 1/\beta$, декремент $d = \dfrac{x_m(t)}{x_m(t+T)}$ и логарифмический декремент $\lambda = \ln(d) = \beta\cdot T$. Число колебаний за время релаксации $N_e = \tau/T = 1/\lambda$.

Добротность $Q = \pi/\lambda = \pi\cdot N_e = 2\cdot\pi\cdot\dfrac{E}{(-\Delta E)}$. Зависимость энергии затухающих колебаний от времени $E = E_0\cdot e^{-2\beta t}$.

7.68. Коэффициент затухания при колебаниях маятника равен 0,1с$^{-1}$. За какое время амплитуда смещения уменьшится в 2,7 раза?

7.69. Коэффициент затухания при колебаниях маятника равен 0,1 с$^{-1}$. За какое время механическая энергия маятника уменьшится в 2,7 раза ?

7.70. Уравнение движения маятника приведено к виду $\ddot{x} + 10\dot{x} + 425x = 0$. Вычислите циклическую частоту затухающих колебаний величины x .

7.71. Уравнение движения маятника приведено к виду $\ddot{x} + 10\dot{x} + 425x = 0$. За какое время механическая энергия маятника уменьшится в 2,7 раза ?

7.72. Уравнение движения маятника $\ddot{x} = -400x - 0{,}02\dot{x}$. Вычислите коэффициент затухания.

7.73. Уравнение движения маятника $\ddot{x} = -400x - 0{,}02\dot{x}$. За какое время механическая энергия маятника уменьшится в 2,7 раза ?

7.74. Уравнение движения маятника $\ddot{x} = -400x - 0{,}02\dot{x}$. Вычислите циклическую частоту собственных колебаний величины x .

7.75. Добротность маятника равна 3,14·10^{3}. Какое количество колебаний совершил маятник за время уменьшения амплитуды смещения в 2,7 раза.

7.76. Логарифмический декремент равен 3,14·10^{-3}. Вычислите добротность маятника.

7.77. Логарифмический декремент равен 10^{-2}. Какое количество колебаний совершит маятник за время уменьшения амплитуды смещения в 2,7 раза?

7.78. Логарифмический декремент равен 10^{-2}, коэффициент затухания равен 10^{-3}. Вычислите период колебаний смещения.

7.79. Затухающие колебания материальной точки происходят по закону $x(t) = x_{m0}\cdot e^{-\beta\cdot t}\cdot\sin(\omega t)$. Найдите амплитуду смещения и скорость точки для момента времени $t = 0$.

7.80. Затухающие колебания материальной точки происходят по закону $x(t) = x_{m0} \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$. Найдите моменты времени, когда точка достигает крайних положений.

7.81. К легкой пружинке подвесили грузик, и она удлинилась на $\Delta x = 9{,}8$ см. Найдите период колебаний смещения грузика от положения равновесия, если ему сообщить небольшую начальную скорость в вертикальном направлении. Логарифмический декремент равен $\lambda = 3{,}1$.

7.82. Амплитуда смещения некоторого осциллятора уменьшается в $\eta = 2$ раза через каждые $N = 110$ периодов колебаний. Найдите добротность этого осциллятора.

7.83. Собственная частота колебаний смещения некоторого осциллятора $\omega_0 = 100$ с$^{-1}$ и время релаксации $\tau = 60$ с. Найдите добротность этого осциллятора.

7.84. Длина математического маятника $l = 0{,}5$ м. За время $t^* = 5{,}2$ мин его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta = 4 \cdot 10^4$ раз. Найдите добротность такого маятника.

Вынужденные колебания

Уравнение вынужденных колебаний $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_m}{m} \cdot \cos(\omega t)$

Решение уравнения $x(t) = x_m \cdot \cos(\omega t - \varphi)$.

Амплитуда вынужденных колебаний $x_m = \dfrac{F_m / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \beta^2 \omega^2}}$

Тангенс разности фаз колебаний вынуждающей силы и колебаний смещения материальной точки от положения равновесия $tg(\varphi) = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Частота колебаний вынуждающей силы, при которой наблюдается резонанс смещения $\omega_x = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Добротность, как отношение смещения при резонансе к смещению при постоянной вынуждающей силе $Q = \dfrac{x_m(\omega_x)}{x_m(\omega = 0)}$.

7.85. Найдите разность фаз φ между смещением и вынуждающей силой при резонансе смещения, если собственная частота колебаний $\omega_0 = 50$ с$^{-1}$ и коэффициент затухания $\beta = 5{,}2$ с$^{-1}$.

7.86. Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах $\omega_1 = 400$ с$^{-1}$ и $\omega_2 = 600$ с$^{-1}$ равны друг другу. Найдите частоту ω, при которой амплитуда смещения максимальна.

7.87. Представьте себе график зависимости амплитуды смещения установившихся вынужденных колебаний некоторого осциллятора от частоты вынуждающей силы. Логарифмический декремент колебаний осциллятора равен $\lambda = 1{,}6$. Найдите для этого графика отношение максимальной амплитуды смещения к амплитуде смещения при очень малой частоте.

7.88. Осциллятор массы m движется по закону $x(t) = x_m \cdot \sin(\omega t)$ под действием вынуждающей силы $F_x = F_m \cdot \cos(\omega t)$. Определите коэффициент затухания β осциллятора.

7.89. При частотах вынуждающей гармонической силы ω_1 и ω_2 амплитуда скорости частицы равна половине максимального значения. Найдите частоту ω_v, соответствующую резонансу скорости.

7.90. При частотах вынуждающей гармонической силы ω_1 и ω_2 амплитуда скорости частицы равна половине максимального значения. Найдите коэффициент затухания β осциллятора и частоту ω_x затухающих колебаний его смещения от положения равновесия.

Ответы

7.1. $x_m = 0{,}25$ м; $\varphi_0 \approx 1{,}57$ рад., $x \approx 4{,}3$ см

7.2. $x_m = 0{,}025$ м; $\varphi_0 = 0$ рад., $x \approx -2{,}5$ см

7.3. $x_m = 0{,}25$ м; $\varphi_0 = arctg10 \approx 84^0$, $x \approx 1{,}9$ см

7.4. $x_m = 0{,}25$ м; $\varphi_0 \approx 1{,}57$ рад., $\sin(\omega t + \varphi_0) \approx -0{,}98$, $v_x \approx 0{,}98$ м/с

7.5. $x_m = 0{,}025$ м; $\varphi_0 = 0$ рад., $v_x \approx 1{,}75$ см/с

7.6. $x_m = 0{,}25$ м; $\varphi_0 = arctg10 \approx 84^0$, $v_x \approx -1$ м/с

7.7. $x_m = 0{,}25$ м; $\varphi_0 \approx 1{,}57$ рад., $a_x \approx -0{,}7$ м/с^2

7.8. $x_m = 0{,}025$ м; $\varphi_0 = 0$ рад., $a_x \approx 0{,}39$ м/с^2

7.9. $x_m \approx 0{,}25$ м; $\varphi_0 = arctg10 \approx 84^0$, $a_x \approx -1{,}9$ см/с^2

7.10. $\alpha(t) = 3 \cdot \cos\left(3{,}54 \cdot t + 90^0\right) = 3 \cdot \sin(3{,}5 \cdot t)$

7.11. $\alpha(t) \approx 4{,}1 \cdot \cos(3{,}5 \cdot t)$

7.12. $\alpha(t) = 5^0 \cdot \cos(3{,}5 \cdot t + 0{,}6)$

7.13. $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Delta l}{g}} \approx 0{,}08$ с

7.14. $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\pi R^2 \rho g}} \approx 0{,}62$ с

7.15. $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2l}{3g}}$

7.16. Увеличилась в два раза.

7.17. $\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$

7.18. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$

7.19. $\omega = \sqrt{\frac{2g}{\sqrt{3} \cdot l}}$

7.20. $\omega = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}g}{3l}}$

7.21. $\omega = \sqrt{\dfrac{6g}{7l}}$

7.22. $\omega = \sqrt{\dfrac{6g}{5\sqrt{2}l}}$

7.23. $\omega = \sqrt{\dfrac{6g}{17R}}$

7.24. $\omega = \sqrt{\dfrac{6g}{17R}}$

7.25. $\omega = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{6g}{65R}}$

7.26. $\omega = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{6g}{65R}}$

7.27. $\omega = \sqrt{\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3} \cdot g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)}$

7.28. $\omega = \sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}}$

7.29. $\omega = \sqrt{\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{2 \cdot g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)}$

7.30. $\omega = \sqrt{\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{\sqrt{2} \cdot g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)}$

7.31. $\omega = \sqrt{\dfrac{6}{17}\left(\dfrac{g}{R} + \dfrac{k}{m}\right)}$

7.32. $\omega = \sqrt{\dfrac{6}{17}\left(\dfrac{g}{R} + 4\dfrac{k}{m}\right)}$

7.33. $\omega = \sqrt{\dfrac{24}{65}\left(\dfrac{g}{R} + 4\dfrac{k}{m}\right)}$

7.34. $\omega = \sqrt{\dfrac{24}{65}\left(\dfrac{g}{R} + \dfrac{k}{m}\right)}$

7.35. $x* = 0, \quad \omega = a \cdot \sqrt{\dfrac{U_0}{m}}$

7.36. $x* = \dfrac{2a}{b}, \quad \omega = \dfrac{b^2}{\sqrt{2ma^3}}$

7.37. $x* = a, \quad \omega = \dfrac{2}{a} \cdot \sqrt{\dfrac{2D}{m}}$

7.38. $x* = 0, \quad \omega = a \cdot \sqrt{\dfrac{2D}{m}}$

7.39. $x* = 2^{1/6} \cdot a, \quad \omega = 2^{1/3} \cdot \dfrac{12}{a} \cdot \sqrt{\dfrac{D}{m}}$

7.43. $x_m = 7$ м

7.44. $x_m \approx 4{,}3$ м

7.45. $x_m = 3$ м

7.46. $x_m \approx 5{,}2$ м

7.47. x_1 и x_2, x_2 и x_3

7.48. x_1 и x_3, $x_m = x_1 + x_3 = 4$ м

7.49. Да

7.50. Да

7.51. Нет

7.52. $E = 20$ Дж

7.53. $E = 10$ Дж

7.54. $E = 0$ Дж

7.55. $E = 10$ Дж

7.56. $E = 20$ Дж

7.57. $\omega_1 = 52{,}1ñ^{-1}$, $\omega_2 = 47{,}9ñ^{-1}$, $T_{á} \approx 2{,}75ñ$

7.58. $N = \left[\dfrac{\nu_1 + \nu_2}{2(\nu_1 - \nu_2)}\right] = 100$

7.68. $\tau = 10ñ$

7.69. $t = 5ñ$

7.70. $\omega = 20ñ^{-1}$

7.71. $t = 0{,}1ñ$

7.72. $\beta = 0{,}01ñ^{-1}$

7.73. $t = 50ñ$

7.74. $\omega_0 = 20ñ^{-1}$

7.75. $N_e = 10^3$

7.76. $Q = 10^3$

7.78. $T = 10ñ$

7.79. $x_m = x_{m0}$, $v_x = x_{m0} \cdot \omega$

7.80. $t_n = \dfrac{\left(arctg\left(\dfrac{\omega}{\beta}\right) + \pi \cdot n\right)}{\omega}$, здесь n = 0, 1, 2, …

7.81. $T = \sqrt{\left(4\pi^2 + \lambda^2\right) \cdot \dfrac{\Delta x}{g}} \approx 0{,}7ñ$

7.82. $Q = \dfrac{\pi \cdot N}{\ln \eta} \approx 498$

7.83. $Q = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(\omega_0 \tau)^2 - 1} \approx 3000$

7.84. $Q = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4\frac{g\left(t^*\right)^2}{l \cdot \ln^2 \eta} - 1} \approx 130$

7.85. $\varphi = arctg\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 2} \approx 84^0$

7.86. $\omega_x = \sqrt{\left(\omega_2^2 + \omega_1^2\right)/2} \approx 510\tilde{n}^{-1}$

7.87. $\frac{x_m\left(\omega_x\right)}{x_m\left(\omega = 0\right)} \approx \frac{\pi}{\lambda} \approx 2$

7.88. $\beta = \frac{F_m}{2m\omega x_m}$

7.89. $\omega_v = \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$

7.90. $\beta = \frac{\left|\omega_2 - \omega_1\right|}{2\sqrt{3}}$

$\omega = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2 - \frac{\left(\omega_2 - \omega_1\right)^2}{12}}$