# 8. Магнитное поле в вакууме.
# Закон Био-Савара
(примеры решения задач)

**Круговой виток с током**

**Пример 8.1.**

По круговому витку радиуса $R$ из тонкой проволоки циркулирует ток $I$. Найдите индукцию магнитного поля:

а) в центре витка;
б) на оси витка на расстоянии $x$ от его центра.

Решение. а) Для расчета индукции магнитного поля воспользуемся принципом суперпозиции. Разобьем кольцо на элементарные участки $d\vec{l}$, по которым течет ток $I$ (рис.). Все элементы тока $I \cdot d\vec{l}$ данного проводника создают в центре магнитные поля одинакового направления – вдоль нормали от плоскости витка (рис.1), поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей.

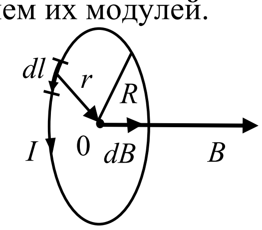


Рис.1

Так как все элементы проводника перпендикулярны радиусу ($dl \perp R$) и расстояние от всех элементов проводника до центра кругового тока одинаково и равно $R$, то согласно закону Био-Савара:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2}.$$

Тогда

$$B = \oint dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\oint\limits_L dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

где $L = 2\pi R$ - длина контура.

Итак, магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Модуль магнитного момента кольца равен

$$p_m = IS = I \cdot \pi R^2,$$

и, также как $\vec{B}$, образует с направлением тока правовинтовую систему. Следовательно, направления $\vec{B}$ и $\vec{p}_m$ совпадают $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{p}_m$.

Приведенное выше решение позволяет найти магнитное поле и в случае, если ток течет по дуге окружности радиуса $R$, длина которой равна $l = R\varphi$ (рис.2). Магнитное поле в центре (точка 0) будет равно:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int\limits_0^l dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}R\varphi = \frac{\mu_0 I\varphi}{4\pi R}.$$

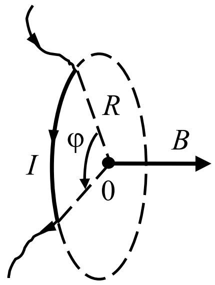


Рис.2

б) Аналогично решению пункта а, для расчета индукции магнитного поля воспользуемся принципом суперпозиции. Разобьем кольцо на элементарные участки $d\vec{l}$ , по которым течет ток $I$ (рис.3).

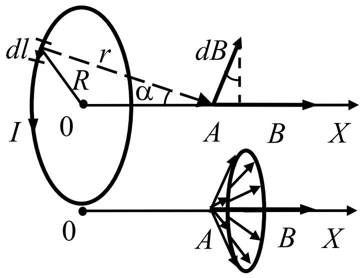



Рис.3

Согласно закону Био-Савара вектор магнитной индукции элемента тока $I \cdot d\vec{l}$ равен

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}.$$

Поля всех элементов тока кольца будут образовывать конус векторов $d\vec{B}$, а результирующий вектор в точке *A*, расположенной на оси витка на расстоянии *x* его центра, будет направлен вправо по оси *X*. Это значит, что для нахождения модуля вектора $\vec{B}$ необходимо сложить проекции векторов $d\vec{B}$ на ось *X*. Каждая такая проекция имеет вид

$$dB_x = dB \sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\alpha,$$

где учтено, что угол между элементом тока $I \cdot d\vec{l}$ радиусом-вектором $\vec{r}$ равен $\pi / 2$ (поэтому синус равен единице). Определив из рисунка $\sin\alpha = R / r$ и $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, получим

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRdl}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение по всему контуру, найдем индукцию магнитного поля на оси кольца на расстоянии *x* от его центра

$$B_x = \oint dB_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Выразим последнее выражение через магнитный момент

$$\vec{p}_m = I\vec{S} = I \cdot \pi R^2 \vec{n}.$$

Поскольку $\vec{p}_m$ также как $\vec{B}$, образует с направлением тока правовинтовую систему, направления $\vec{B}$ и $\vec{p}_m$ совпадают $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{p}_m$, поэтому магнитное поле на оси кольца

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Для величины магнитного поля в точке $A$, расположенной на большом расстоянии $x >> R$ от кольца полученная зависимость принимает вид:

$$B_x = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{x^3}.$$

В центре витка с током $x$=0, поэтому магнитная индукция равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{p_m}{R^3},$$

что совпадает с результатом, полученным в пункте а).

Зависимость индукции магнитного поля на оси кольца схематично показана на рис.4.

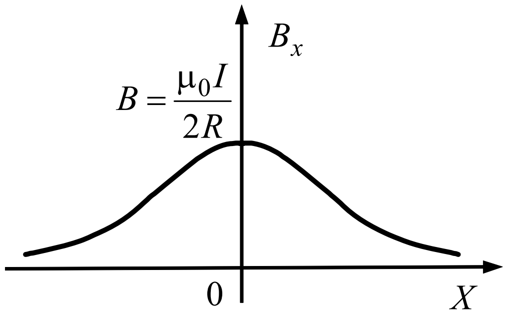



Рис.4

**Прямолинейный проводник с током**

**Пример 8.2.**

Докажите, что в точке $A$ индукция магнитного поля $B$, создаваемого прямолинейным отрезком тонкого провода с током $I$, определяется формулой: $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right)$, где расстояние $x$ и углы $\alpha_1$, $\alpha_2$, определяют положение точки $A$ относительно отрезка (рис.5).

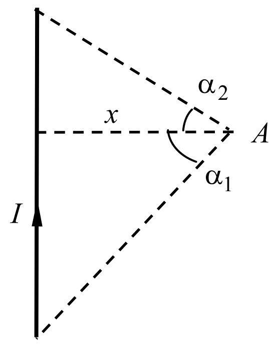
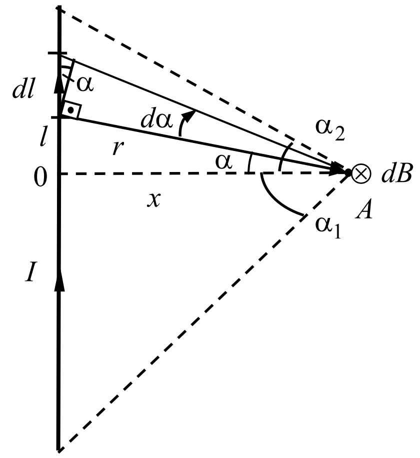



Рис.5

Решение. Для решения задачи воспользуемся принципом суперпозиции.

Разобьем проводник на элементарные участки $d\vec{l}$, по которым течет ток $I$ (рис.6). Согласно закону Био-Савара, вектор магнитной индукции, создаваемого в точке $A$ каждым элементом тока $I \cdot d\vec{l}$ равен

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}.$$



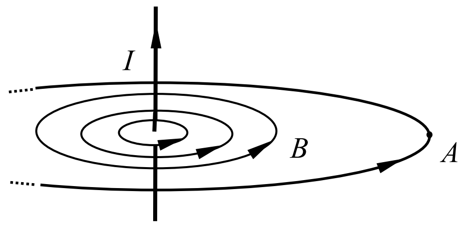




Рис.6

Векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ для всех участков проводника лежат в плоскости чертежа, поэтому в точке $A$ векторы $d\vec{B}$ имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа (от нас $\otimes$), что продемонстрировано на нижнем рисунке. Сложение векторов $d\vec{B}$ сводится к сложению их модулей. В качестве переменной интегрирования выберем угол $\alpha$ (угол между $x$ и $r$). Выразим через угол $\alpha$ все остальные величины. Из рис.6 видно, что $r = x/\cos\alpha$, $l = x\,\mathrm{tg}\alpha$, поэтому длина элемента тока связана с приращением $\alpha$ соотношением

$$dl = x\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Магнитная индукция, создаваемая элементом проводника, равна:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\frac{r\,d\alpha}{\cos\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\cos\alpha\,d\alpha.$$

Угол $\alpha$ для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от $\alpha_1$ до $\alpha_2$ (рис.6), тогда

$$B = \int dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right),$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right),$$

где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ углы, под которыми мы видим из точки, в которой определяем поле, концы проводника. Эти углы являются алгебраическими величинами и отсчитываются от перпендикуляра, опущенного из точки на проводник. Положительное направление отсчета угла $\alpha$ соответствует углу, отсчитываемому от перпендикуляра в направлении тока.

Полученную формулу можно использовать для расчета полей различных прямолинейных проводников с токами.

***Рассмотрим специальные случаи использования формулы для расчета индукция магнитного поля B, прямолинейным отрезком тонкого провода с током I***

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2\right):$$

а) поле бесконечного проводника с током:

$$\alpha_1\to-\frac{\pi}{2},\quad \alpha_2\to\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ B=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}.$$

б) поле полубесконечного проводника с током:

$$\alpha_1\to-\frac{\pi}{2},\alpha_2\to 0\ \Rightarrow\ B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\sin 0-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}.$$

г) поле отрезка в точке, лежащей на перпендикуляре, восстановленном из середины отрезка

$$\alpha_1=-\alpha_2\ \Rightarrow\ B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\sin\alpha_1-\sin(-\alpha_1)\right)=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\sin\alpha_1.$$

**<u>Пример 8.3.</u>**

По двум длинным проводам, находящимся на расстоянии $r$ друг от друга в вакууме, идут в противоположных направлениях токи силой $I_1=I_2=I$. Определите индукцию магнитного поля в точке А, находящейся на прямой, соединяющей эти токи на расстоянии $r_1$ от одного провода.

<u>Решение.</u> Согласно принципу суперпозиции, магнитная индукция в точке А равна

$$\vec{B}_A=\vec{B}_1+\vec{B}_2,$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ - векторы магнитной индукции, создаваемые в данной точке токами $I_1$ и $I_2$ соответственно.

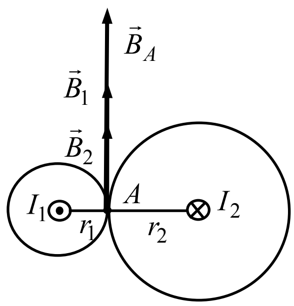



Рис.7

Направления векторов магнитной индукции в точке $A$ определим по правилу правого винта. Как видно из рис.7 векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ имеют одинаковое направление, поэтому модуль вектора $\vec{B}_A$ равен сумме модулей векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$:

$$B_A=B_1+B_2=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\ r_1}+\frac{\mu_0 I_2}{2\pi\ r_2}.$$

Учитывая, что $r_2=r-r_1$ и $I_1=I_2=I$, получаем:

$$B_A=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r-r_1}\right).$$

**<u>Комбинированные задачи</u>**

**Пример 8.4.**

По круговому витку радиуса $R$ течет ток $I_2$. Через точку на перпендикуляре, восстановленном из центра витка, проходит бесконечно длинный провод с током $I_1$ параллельный плоскости витка. Расстояние от центра витка до провода $d$. Определите магнитную индукцию в центре витка.

Решение. Направления векторов магнитной индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$, создаваемых током в проводе и током в витке, в центре витка определим по правилу правого винта (рис.8)

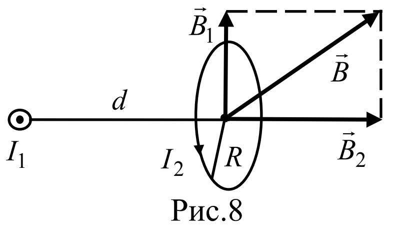



Рис.8

Согласно принципу суперпозиции, магнитная индукция в центре витка:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 .$$

Из взаимной перпендикулярности векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$, следует что

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} .$$

Зная, что магнитное поле прямого проводника с током равна $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$, а магнитное поле в центре витка с током - $B_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{2R}$, получим искомую величину магнитной индукции в

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \mu_0 \sqrt{\frac{I_1^2}{(2\pi d)^2} + \frac{I_2^2}{(2R)^2}} .$$

**Пример 8.5.**

Длинный проводник с током $I$ изогнут так, как показано на рис.9 для случаев *а)* и *б)*. Радиус изогнутой части проводника *R,* прямолинейные участки проводника предполагаются очень длинными. Найти индукцию магнитного поля $B$ в точке 0.

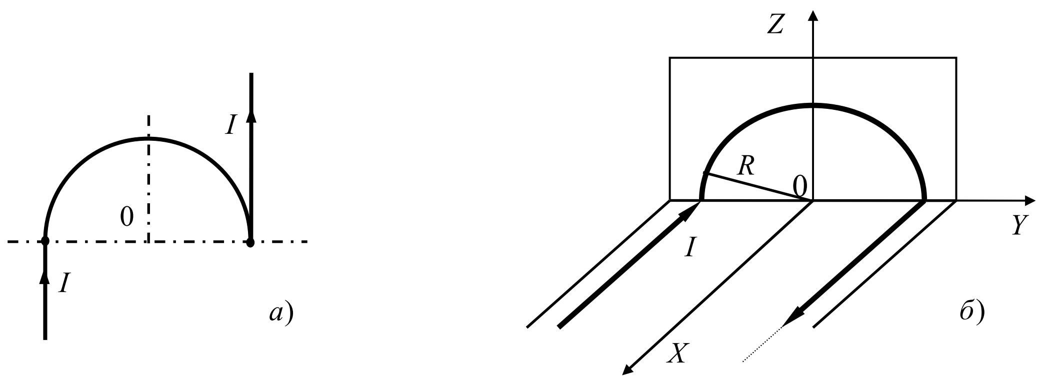



Рис.9

Решение. а) Выделим в проводнике три части - две полубесконечные (1 и 3) и полукольцо (2) (рис.10).

Согласно принципу суперпозиции, магнитная индукция в точке 0:

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 .$$

Векторы $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ имеют одинаковое направление, поэтому модуль вектора $\vec{B}_0$ равен сумме модулей векторов $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$.
Найдем поля, создаваемые в точке 0 каждой из частей.

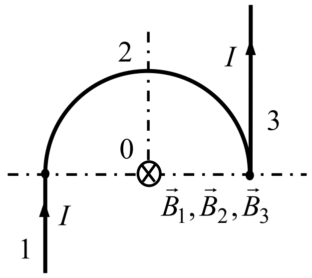



Рис.10

Части *1* и *3* являются полубесконечными проводниками с токами, поэтому для расчета их полей воспользуемся результатом ***задачи 8.2***:

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Часть *2* является полукольцом, поэтому согласно результату ***задачи 8.1*** магнитная индукция поля в центре полукольца будет равна

$$B_2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Найдем результирующее поле

$$B_0 = B_1 + B_2 - B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

б) Так же как и пункте а) задачи, выделим в проводнике 3 части - две полубесконечные (1 и 3) и полукольцо (2) (рис.11).

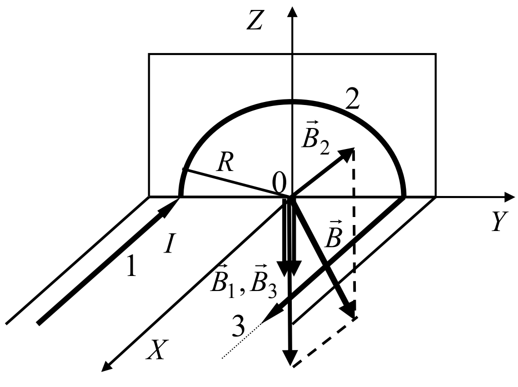



Рис.11

Согласно принципу суперпозиции, магнитная индукция в точке 0:

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

Вектора $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ показаны на рисунке. Вектора $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_3$ в точке 0 направлены в отрицательном направлении оси *Z*, поэтому вектор $\vec{B}_1 + \vec{B}_3$ также будет иметь то же направление, а его величина равна сумме модулей этих векторов. Обе эти части являются полубесконечными проводниками с токами, поэтому для расчета $\vec{B}_1 + \vec{B}_3$ воспользуемся результатом ***задачи 8.2***:

$$\left| \vec{B}_1 + \vec{B}_3 \right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Часть *2* является полукольцом, поэтому согласно результату ***задачи 8.1*** вектор магнитной индукция поля в центре полукольца будет равен

$$B_2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

и направлен вдоль отрицательного направления оси $X$.

Поскольку направления векторов $\vec{B}_1 + \vec{B}_3$ и $\vec{B}_2$ взаимно перпендикулярны, результирующее поле равно

$$B = \sqrt{(B_1 + B_3)^2 + B_2^2} = \sqrt{4 + \pi^2}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

**Интегрирование**

**Пример 8.6.**

Ток $I$ течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиуса $R$. Найдите индукцию магнитного поля на его оси в точке 0.

Решение. Разобьем проводник на тонкие нити вдоль оси проводникас током $dI$. Тогда, согласно результату ***задачи 8.2*** магнитное поле каждой такой нити в точке 0 равно

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R},$$

а направление поля отдельной нити показано на рисунке. Множество векторов $d\vec{B}$, порождаемых всеми нитями, представляется веером векторов (рис.12)

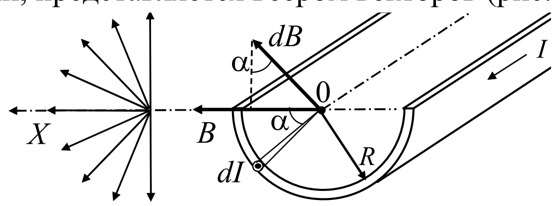



Рис.12

Из симметрии ориентации векторов относительно оси $X$ следует, что результирующий вектор будет направлен вдоль оси $X$. Для нахождения модуля вектора $\vec{B}$ согласно принципу суперпозиции необходимо сложить проекции векторов $d\vec{B}$ на ось $X$. Каждая такая проекция имеет вид

$$dB_x = dB\sin\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi R}\sin\alpha\, dI.$$

Учитывая, что $dI = (I/\pi)\cdot d\alpha$, проинтегрируем последнее выражение по углу $\alpha$ и найдем индукцию магнитного поля на оси :

$$B = \int_0^{\pi} dB = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

**Пример 8.7.**

Длинный прямой соленоид имеет радиус сечения $R$ и число витков на единицу длины $n$. По соленоиду течет постоянный ток $i$. Найдите индукцию магнитного поля на оси как функцию координаты $x$, отсчитываемой вдоль оси соленоида от его торца. Изобразите примерный график зависимости индукции $B$ от $x$.

Решение. Так как шаг винтовой линии провода соленоида мал по сравнению с радиусом витка, то магнитное поле соленоида можно рассматривать как результат сложения полей, создаваемых круговыми токами, имеющими общую ось.
Величина индукции магнитного поля в некоторой точке $A$ на оси кругового тока $i$ радиуса $R$ (рис.13) определяется выражением

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2}\frac{iR^2}{r^3},$$

которое можно получить, воспользовавшись законом Био - Савара и принципом суперпозиции (см. ***задачу 8.1***), где $r$ - модуль вектора $\vec{r}$, определяющего положение точки $A$.

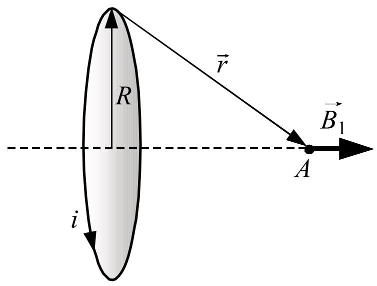



Рис.13

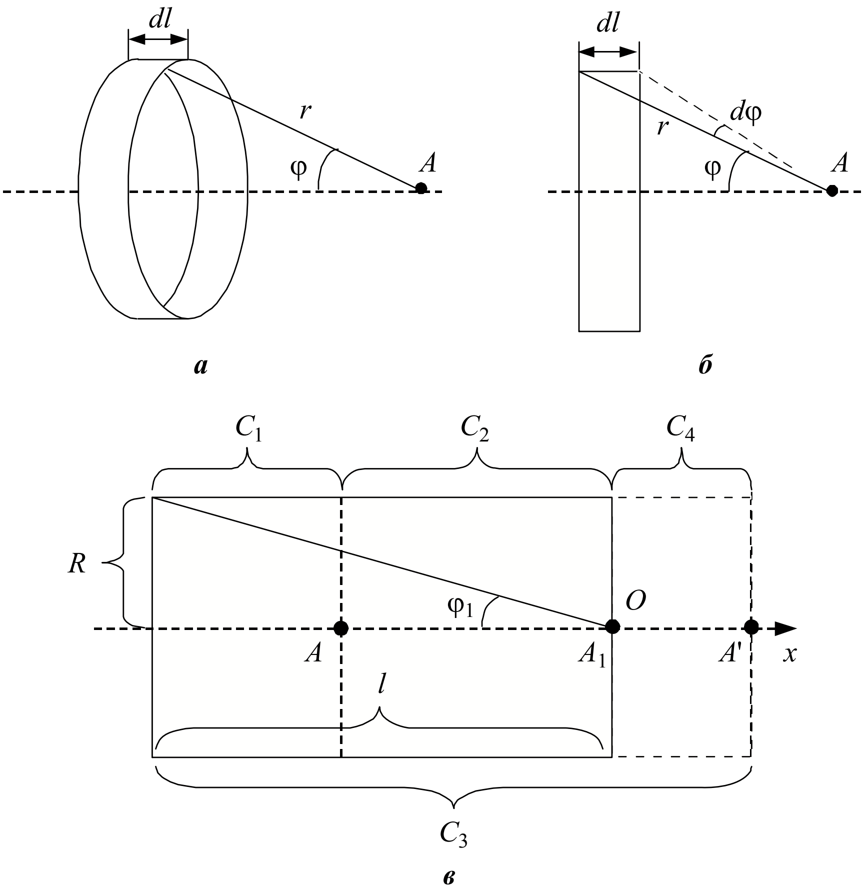



Рис.14

Если соленоид имеет длину $l$ и содержит $N$ витков, то малая часть соленоида длиной $dl$ (рис.14*а*) содержит $(N/l)dl$ витков и может рассматриваться как круговой ток величиной $di = i(N/l)dl$. С учетом того, что

$$dl \sin\varphi = r d\varphi$$

(рис.14*б*, $d\varphi$ - бесконечно малое приращение угла $\varphi$), получим для индукции магнитного поля в точке *A* на оси такого "элементарного" соленоида

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 nid\varphi}{r^2 \sin\varphi},$$

где $n = N/l$ - число витков, приходящихся на единицу длины соленоида. Так как $R = r\sin\varphi$, то

$$dB = \frac{\mu_0}{2} in\sin\varphi d\varphi .$$

Проинтегрировав полученное выражение в пределах от $\varphi_1$ до $\pi/2$ (рис.14*в*), получим индукцию магнитного поля в точке $A_1$, лежащей на торце соленоида:

$$B = \frac{\mu_0 in}{2}\cos\varphi_1 = \frac{\mu_0 in}{2}\frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}}.$$

Магнитное поле в произвольной точке *A*, лежащей на оси соленоида внутри него, может быть вычислено как сумма полей, создаваемых соленоидами $C_1$ и $C_2$ (рис.14*в*), а в точке *A*', лежащей вне соленоида, магнитное поле равно разности полей, создаваемых соленоидами $C_3$ и $C_4$. В результате получим:

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2}\left[\frac{l+x}{\sqrt{(l+x)^2 + R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right],$$

где $x > 0$ вне соленоида и $-l < x < 0$ внутри соленоида.

Из последнего выражения следует, что в центре соленоида ($x = -l/2$) индукция магнитного поля равна

$$B_0 = \frac{\mu_0 ni}{\sqrt{1 + (2R/l)^2}}.$$

Примерный график зависимости индукции *B* от *x* представлен на рис.15.

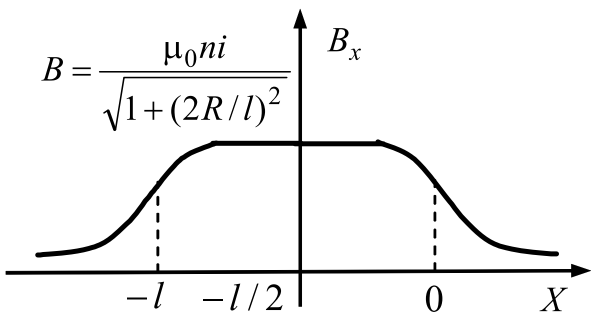



Рис.15

**<u>Пример 8.8.</u>**

При помощи закона Био-Савара и принципа суперпозиции вычислите индукцию магнитного поля тока *I*, протекающего по замкнутому контуру, в точке *A*, расположенной на большом расстоянии *r* от контура. Рассмотреть случаи (рис.16):

А) Контур – прямоугольник со сторонами *a* и *b* << *r*. Точка *A* лежит на прямой, проходящей через центр прямоугольника, перпендикулярно его плоскости.

Б) Контур – прямоугольник со сторонами *a* и *b* << *r*. Точка *A* лежит на прямой, проходящей через середины противоположных сторон прямоугольника.

В) Контур – квадрат со стороной $a << r$. Точка $A$ лежит на прямой, проходящей через центр квадрата и одну из его вершин.

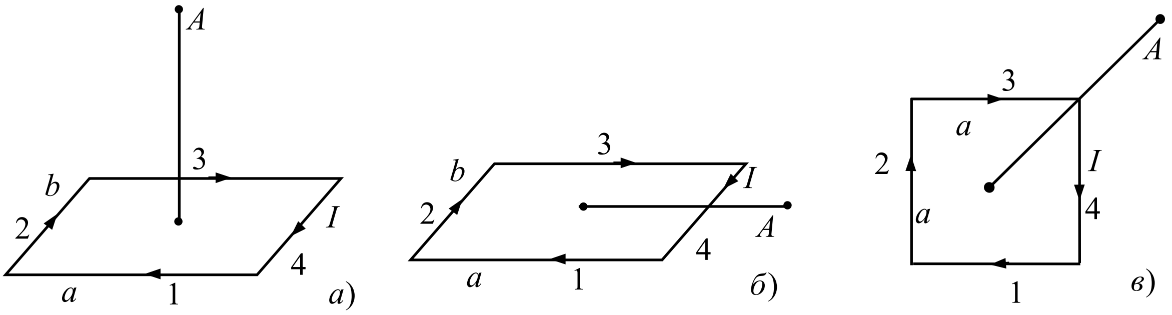



Рис.16

Решение.

А) Представим рамку с током в виде элементов тока 1, 2, 3, 4 (см.рис.16 а). Тогда, согласно принципу суперпозиции магнитное поле в точке $A$ создается всеми четырьмя элементами равно

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 .$$

Найдем поле, создаваемое параллельными элементами тока 2 и 4, векторы $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_4$ векторы которых, а также их сумма $\vec{B}_{24}$ показаны на рис.17.

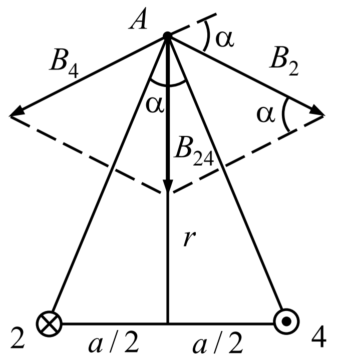



Рис.17

Легко показать, что $\Delta(\vec{B}_2, \vec{B}_4, \vec{B}_{24})$ подобен геометрическому треугольнику $\Delta(2, A, 4)$. Поэтому:

$$\frac{B_{24}}{B_2} = \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2/4}} ,$$

где, согласно закону Био-Савара:

$$B_2 = B_4 = \frac{\mu_0 I b}{4\pi} \frac{1}{r^2 + a^2/4} .$$

Откуда модуль результирующего вектора $\vec{B}_{24}$ равен

$$B_{24} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ab}{(r^2 + a^2/4)^{3/2}} .$$

Аналогично найдем модуль вектора $\vec{B}_{13}$

$$B_{13} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ab}{(r^2+b^2/4)^{3/2}}.$$

Векторы $\vec{B}_{24}$ и $\vec{B}_{13}$ сонаправлены, поэтому вектор, полученный в результате их суммы, будет иметь то же направление, а его величина равна сумме модулей этих векторов

$$B = B_{12} + B_{24} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}ab\left[\frac{1}{(r^2+a^2/4)^{3/2}} + \frac{1}{(r^2+b^2/4)^{3/2}}\right].$$

Проанализируем полученное выражение для случая $r >> a, b$, которое после преобразований примет вид

$$B \cong \frac{\mu_0 I}{4\pi}ab(1/r^3 + 1/r^3) = \frac{2\mu_0 p_m}{4\pi r^3},$$

где $\vec{p}_m = I[\vec{a},\vec{b}]$ - магнитный момент.

Таким образом, искомый вектор магнитной индукции в точке $A$ равен

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3}.$$

Б) Рассмотрим случай, когда точка $A$ расположена в плоскости так, как показано на рис. 16 б. Аналогично случаю а) представим рамку с током в виде элементов тока 1, 2, 3, 4 (см.рис.16 б). Тогда, согласно принципу суперпозиции магнитное поле в точке $A$ создается всеми четырьмя элементами тока и равно

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4.$$

Векторы магнитной индукции $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_4$, создаваемые параллельными элементами тока 2 и 4, а также их сумма $\vec{B}_{24}$ показаны на рис.18.

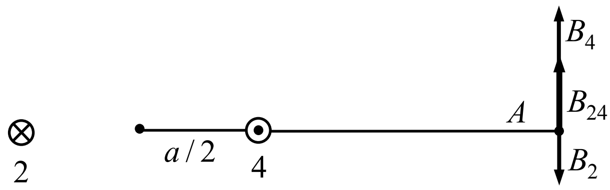



Рис.18

Векторы $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_4$ лежат на одной прямой, но имеют противоположные направления, поэтому вектор, полученный в результате их суммы, будет иметь то же направление, что и вектор, больший из них по модулю. Поскольку элемент тока 4 расположен ближе к точке $A$, то

$$B_{24} = B_4 - B_2 = \frac{\mu_0 Ib}{4\pi}\left[\frac{1}{(r-a/2)^2} - \frac{1}{(r+a/2)^2}\right] = \frac{\mu_0 Ib \cdot 2ra}{4\pi(r^2-(a/2)^2)^2} \cong \frac{2\mu_0 Iab}{r^3}.$$

На рис.19 показаны векторы магнитной индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_3$, создаваемые элементами тока 1 и 3, а также их сумма $\vec{B}_{13}$.

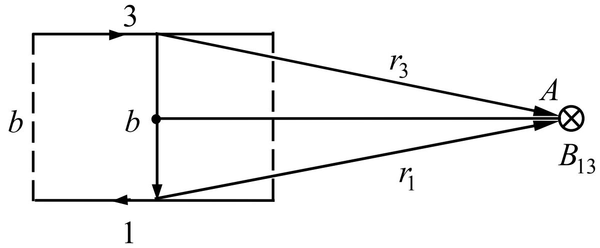



Рис.19 (вид сверху)

Учитывая что $\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \vec{b}$ и $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_3| = \sqrt{r^2+(b/2)^2}$ (см.рис.19), получим

$$\vec{B}_{13} = \frac{\mu_0 I[\vec{a},\vec{r}_3]}{r_3^3} + \frac{\mu_0 I[-\vec{a},\vec{r}_1]}{r_1^3} = \frac{\mu_0 I}{\left(\sqrt{r^2+(b/2)^2}\right)^3}\left[\vec{a},\vec{r}_3-\vec{r}_1\right] \cong \frac{\mu_0 I[\vec{a},\vec{b}]}{r^3} .$$

Покажем направления векторов $\vec{B}_{13}$ и $\vec{B}_{24}$ на рис.20 и найдем результирующее магнитное поле, создаваемое рамкой с током в точке $A$ в этом случае .

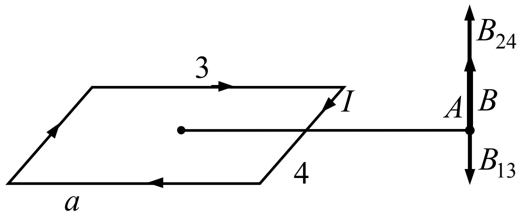



Рис.20

$$B = B_{24} - B_{13} = \frac{2\mu_0 Iab}{r^3} - \frac{\mu_0 Iab}{r^3} = \frac{\mu_0 Iab}{r^3},$$

или в векторном виде

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \vec{p}_m}{r^3} .$$

В) Согласно принципу суперпозиции магнитное поле в точке $A$ создается всеми четырьмя элементами и равно

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 .$$

Покажем направления векторов магнитной индукции, создаваемых каждым из элементов тока, на рис.21.

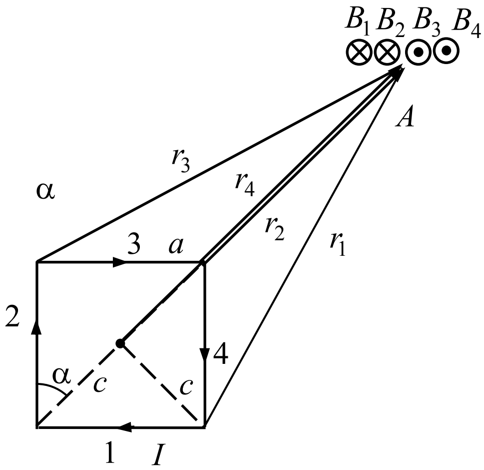



Рис.21

Воспользовавшись законом Био-Савара найдем магнитную индукцию в точке $A$, создаваемую элементами тока 1 и 3 :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\sin(\pi-\pi/4)}{r_1^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\sin(\pi/4)}{r_1^2},$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\sin(\pi/4)}{r_3^2}.$$

Т.к. $r_1 = r_3$, а векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_3$ имеют противоположные направления, то

$$\vec{B}_{13} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 = 0 .$$

Аналогично найдем магнитную индукцию, создаваемую в данной точке элементами тока 2 и 4:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\sin(\pi/4)}{(r+c)^2},$$

$$B_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\sin(\pi-\pi/4)}{(r-c)^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\sin(\pi/4)}{(r-c)^2}.$$

Поскольку векторы $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_4$ имеют противоположные направления, то

$$B = B_{24} = B_4 - B_2 = \frac{\mu_0 Ia\sin(\pi/4)}{4\pi}\left(1/(r-c)^2 - 1/(r+c)^2\right) = \frac{\mu_0 Ia\sin(\pi/4)\cdot 2rc}{4\pi(r^2-c^2)^2} \cong \frac{\mu_0 Ia^2}{4\pi r^3},$$

или в векторном виде

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \vec{p}_m}{4\pi r^3}.$$