

# Оптические задачи на вступительных экзаменах

**В. МОЖАЕВ**

**ЗАДАЧА 1.** ДВА ЛУЧА СИММЕТРИЧНО ПЕРЕСЕКАЮТ главную оптическую ось собирающей линзы на расстоянии  $d = 7,5$  см от линзы под углом  $\alpha = 4^\circ$  (рис.1). Определите угол  $\beta$  между этими лучами после прохождения ими линзы, если фокусное расстояние линзы  $F = 10$  см.

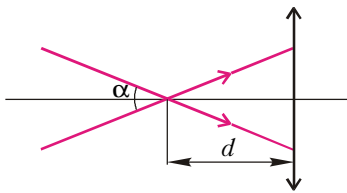


Рис. 1

Построим ход одного из данных лучей после преломления в линзе (рис.2). Через оптический центр линзы (на рисунке 2 это точка O) проведем побочную оптическую ось OC, параллельную данному лучу AB. Параллельные лучи после прохождения собирающей линзы пересекаются в ее фокальной плоскости. Очевидно, что точкой пересечения данных лучей будет точка C, которая одновременно принадлежит

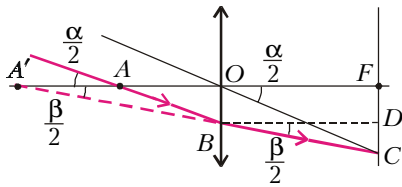


Рис. 2

лежит оси OC и фокальной плоскости FC. Продолжим луч BC влево до пересечения с главной оптической осью линзы в точке A'. Угол BA'O является половиной искомого угла  $\beta$ . Проведем линию BD параллельно главной оптической оси. Угол CBD также равен  $\beta/2$ . Отрезок FC равен  $F \operatorname{tg}(\alpha/2)$ , где  $F$  – фокусное расстояние нашей линзы. А отрезок FD равен отрезку OB, который в свою очередь равен  $d \operatorname{tg}(\alpha/2)$ . Из треугольника CBD найдем

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{FC - FD}{F} = \frac{F - d}{F} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$\beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta}{2} \approx 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx 1^\circ.$$

Эту задачу можно решать и с использованием формулы линзы. Так как точка A расположена ближе фокуса линзы, ее изображение будет мнимым. Запишем формулу линзы и найдем расстояние  $f$  от мнимого изображения A' точки A до линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \text{ и } f = \frac{dF}{F - d}.$$

Из треугольника A'OB (см. рис.2) находим  $\operatorname{tg}(\beta/2) = OB/f$ . Поскольку  $OB = d \operatorname{tg}(\alpha/2)$ , получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{F - d}{F} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

**Задача 2.** Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии  $d = 60$  см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием  $F = 15$  см. Линзу сместили вверх на  $L = 2$  см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить источник света, чтобы его изображение вернулось в старое положение?

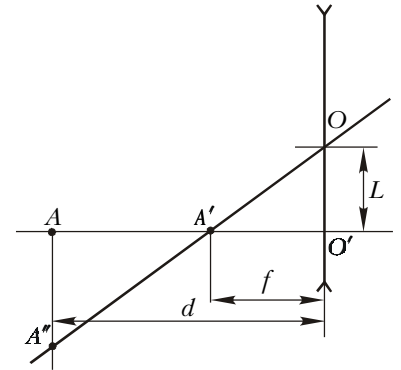


Рис. 3

Поскольку линзы смещают в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси линзы, а изображение источника (A') должно остаться в прежнем положении, расстояние от источника (A) до плоскости линзы также должно сохраниться. Все это будет выполнено, если оптический центр линзы (O), изображение источника (A') и новый источник (A'') будут лежать на одной прямой. На рисунке 3 это прямая OA''. Следовательно, источник надо сместить вниз на расстояние AA''.

По формуле линзы найдем расстояние  $f$  от изображения источника до линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}, \text{ и } f = \frac{dF}{d + F}.$$

Из подобия треугольников AA'A'' и A'O'O' можно записать

$$\frac{AA''}{L} = \frac{d - f}{f}.$$

Отсюда находим искомое расстояние:

$$AA'' = L \left( \frac{d}{f} - 1 \right) = \frac{Ld}{F} = 8 \text{ см}.$$

**Задача 3.** Изображение точечного источника, расположенного на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии  $d = 60$  см от нее, получено на экране. Между линзой и источником вставили плоскопараллельную прозрачную пластинку толщиной  $a = 3$  см, перпендикулярную главной оптической оси линзы. Чтобы снова получить четкое изображение источника, экран пришлось передвинуть вдоль оптической оси на  $\Delta = 1$  см. Определите показатель преломления пластинки, если фокусное расстояние линзы  $F = 30$  см.

Сначала рассмотрим прохождение лучей от точечного источника A через плоскопараллельную пластинку (рис.4). Направим один из лучей под произвольным углом  $\alpha$  к главной оптической оси линзы. После преломления на двух границах пластинки луч выйдет параллельно падающему

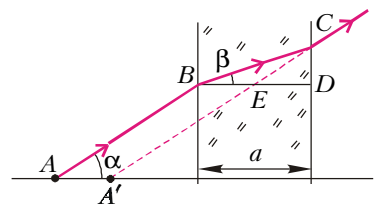


Рис. 4

лучу. Из треугольника  $BCD$  найдем длину стороны  $BC$ :

$$BC = \frac{a}{\cos \beta}.$$

Из треугольника  $BCE$  по теореме синусов можно записать

$$\frac{BE}{BC} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha},$$

откуда получим

$$BE = a \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta \sin \alpha}.$$

Для параксиальных лучей, т.е. для лучей, идущих под малыми углами к главной оптической оси линзы, можно считать, что  $\sin(\alpha - \beta) = \alpha - \beta$ ,  $\sin \alpha = \alpha$ , а  $\cos \beta = 1$ . В этом приближении

$$BE = a \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Расстояние  $BE$  равно смещению источника по направлению к линзе. До помещения пластины источник и его изображение находились на двойном фокусном расстоянии от линзы. После установления пластины источник приблизился к линзе на расстояние  $AA' = BE$ , а изображение отодвинулось от линзы на  $\Delta$ . По формуле линзы можно записать

$$\frac{1}{d - AA'} + \frac{1}{d + \Delta} = \frac{1}{F},$$

или

$$d - a \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{F(d + \Delta)}{d + \Delta - F}.$$

Разрешая это равенство относительно  $n$ , получим

$$n = \left( \frac{(a - d)(d + \Delta - F) + F(d + \Delta)}{a(d + \Delta - F)} \right)^{-1} = \frac{31}{21} \approx 1,48.$$

**Задача 4.** В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием  $F = 40$  см (рис. 5). По потолку  $AB$  ползет муха со скоростью  $v = 2$  см/с. Расстояние от потолка до зеркала  $d = 220$  см. На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы  $OO'$ ?

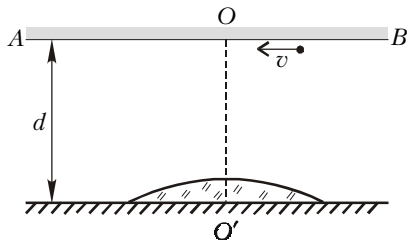


Рис. 5

Пусть муха в некоторый момент находится на небольшом расстоянии  $OM$  от главной оптической оси линзы (рис. 6). По формуле линзы мы можем найти, на каком расстоянии от линзы находится изображение мухи  $M'$ :

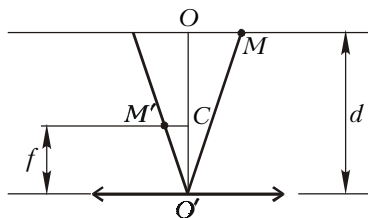


Рис. 6

Здесь  $f$  – расстояние от изображения мухи до линзы, а двойка в чис-

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{F}, \text{ и}$$

$$f = \frac{dF}{2d - F} = 22 \text{ см.}$$

лителе правой части формулы учитывает двойной проход лучей через линзу.

Из подобия треугольников  $OO'M$  и  $M'CO'$  следует, что  $d/f = OM/M'C$ . Очевидно, что  $OM/M'C = v/u$ , где  $u$  – скорость изображения мухи. Следовательно,

$$u = v \frac{f}{d} = 0,2 \text{ см/с.}$$

**Задача 5.** С помощью рассеивающей линзы получено изображение спички, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением  $\Gamma_1 = 1/2$ . По другую сторону линзы на расстоянии  $l = 9$  см от нее перпендикулярно главной оптической оси линзы установили плоское зеркало. Изображение спички в системе линза – зеркало получилось с увеличением  $\Gamma = 1/4$ . Определите фокусное расстояние линзы.

Рассмотрим сначала первый случай, когда зеркала нет, а с помощью рассеивающей линзы получено изображение спички с увеличением  $\Gamma_1$ . Обозначим расстояние от спички до линзы через  $d$ , а от изображения спички до линзы через  $f$ . По формуле линзы можно записать

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F},$$

где  $F$  – фокусное расстояние линзы. Умножив каждый член этого равенства на  $f$ , получим

$$\frac{f}{d} - 1 = -\frac{f}{F}.$$

С учетом того, что  $f/d = \Gamma_1$ , мы получаем однозначную связь между расстоянием от изображения до линзы и увеличением:

$$f = F(1 - \Gamma_1).$$

Мнимое изображение  $B$  точки спички  $B_0$  в линзе (рис. 7) будет являться предметом для плоского зеркала. Расстояние от этого предмета до зеркала равно  $f + l$ .

Изображение  $B'$  этого предмета в зеркале находится также на расстоянии  $f + l$  от зеркала. Расстояние от изображения  $B'$  до линзы равно  $d' = f + 2l$ . Обозначим расстояние от изображения  $B''$  в линзе через  $f'$  и снова воспользуемся формулой линзы:

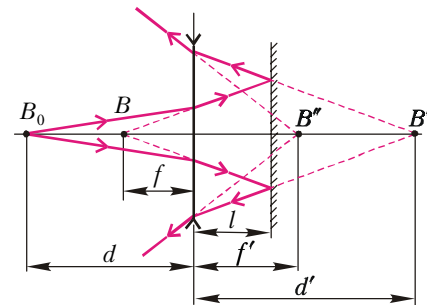


Рис. 7

$$\frac{1}{f + 2l} - \frac{1}{f'} = -\frac{1}{F}.$$

Увеличение в этом случае равно  $\Gamma_2 = \frac{f'}{f + 2l}$ . С другой стороны,  $\Gamma_2 = \Gamma/\Gamma_1$ . Умножим все члены в формуле линзы на  $f + 2l$ , подставим ранее найденное выражение для  $f$  и получим

$$F = \frac{2l}{\Gamma_1 + \Gamma_1/\Gamma - 2} = 36 \text{ см.}$$

**Задача 6.** Из стеклянной пластинки с показателем преломления  $n = 1,5$  вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом  $R = 10$  см. Через такую линзу рассматривается точечный источник света  $S$ , расположенный на расстоянии  $d = R/2$  от плоской поверхности полушара (рис. 8). На каком расстоянии от этой поверхности наблю-

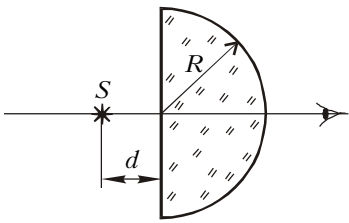


Рис. 8

Решение задачи разобьем на два этапа. На первом этапе рассмотрим падение лучей от источника на плоскую границу раздела: справа находится стекло с показателем преломления  $n$ , а слева – воздушная среда (рис.9).

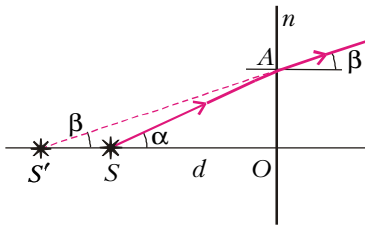


Рис. 9

найдем из треугольника  $S'O$ :

$$S'O = \frac{AO}{\operatorname{tg} \beta} = d \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = d \frac{\alpha}{\beta} = dn.$$

Полученный результат позволяет нам заменить реальный источник  $S$ , расположенный в воздушной среде, мнимым источником  $S'$ , расположенным в стекле. Эта эквивалентная ситуация изображена на рисунке 10.

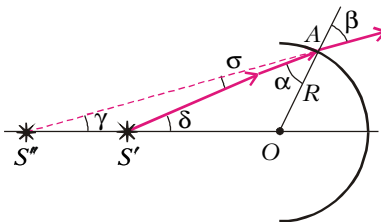


Рис. 10

Слева от сферической границы находится стеклянная среда с показателем преломления  $n$ , а справа – воздушная среда. Из точки  $S'$  проведем произвольный луч под углом  $\delta$  к горизонту. Обозначим угол падения на границу двух сред через  $\alpha$ , а угол преломления через  $\beta$ . По закону преломления,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = n.$$

Из треугольника  $S'AO$  по теореме синусов можно записать

$$\frac{R}{S'O} = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Подставляя сюда выражение для  $S'O$ , получим связь между углами  $\delta$  и  $\alpha$ :

$$\delta = \frac{2\alpha}{n}.$$

Угол  $\sigma$ , очевидно, равен разности углов  $\beta$  и  $\alpha$ :

$$\sigma = \beta - \alpha = \alpha(n - 1).$$

Углы  $\sigma$  и  $\gamma$  в сумме равны углу  $\delta$ , поэтому

$$\gamma = \delta - \sigma = \frac{2\alpha}{n} - \alpha(n - 1) = \alpha \frac{2 - n(n - 1)}{n}.$$

Теперь рассмотрим треугольник  $S''AO$ . По теореме синусов можно записать

$$\frac{S''O}{R} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{n^2}{2 - n^2 + n}.$$

датель увидит изображение источника света? Указание: для малых углов  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha = \alpha$ .

Сразу оговоримся, что мы будем рассматривать параксиальные лучи, т.е. лучи, которые распространяются под малыми углами к главной оптической оси линзы. Решение задачи разобьем на два этапа. На первом этапе рассмотрим падение лучей от источника на плоскую границу раздела: справа находится стекло с показателем преломления  $n$ , а слева – воздушная среда (рис.9). Из треугольника  $SAO$  находим

$$AO = d \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  – произвольный угол. Расстояние  $S'O$

Отсюда искомое расстояние будет равно

$$S''O = R \frac{n^2}{2 - n^2 + n} = 18 \text{ см}.$$

Данная задача имеет другое решение, которое принципиально отличается от приведенного выше. Для параксиальных лучей стеклянную полусферу можно рассматривать как суперпозицию стеклянной плоскопараллельной пластинки толщиной  $R$  и плосковыпуклой линзы с радиусом кривизны  $R$ . Вывод выражения для фокуса  $F$  такой системы выходит за рамки школьной программы, потому мы приведем лишь окончательный результат:

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{n - 1}{R}$$

(с одной стороны радиус кривизны поверхности линзы равен  $R$ , с другой стороны мы имеем плоскую поверхность, т.е. радиус кривизны бесконечно большой). Проведите этот способ решения и сравните результат с полученным выше ответом.

**Упражнения**

1. Два луча симметрично пересекают главную оптическую ось рассеивающей линзы на расстоянии  $d = 24$  см от линзы под углом  $\alpha = 6^\circ$  (рис.11). Определите угол между этими лучами после прохождения ими линзы, если фокусное расстояние линзы  $F = 12$  см.

2. Сходящийся пучок света, падающий на рассеивающую линзу симметрично относительно главной оптической оси, собирается в точку на экране, находящимся на расстоянии  $f = 90$  см от линзы.

Если перед линзой перпендикулярно главной оптической оси разместить плоскопараллельную оптически прозрачную пластинку, то из линзы будет выходить параллельный пучок света. Чему равна толщина пластинки  $l$ , если ее показатель преломления  $n = 1,5$ ? Фокусное расстояние линзы  $F = 10$  см.

3. На столе лежит плоское зеркало, к которому плотно прилегает тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием  $F = 45$  см. Над оптической системой параллельно плоскости зеркала на расстоянии  $d = 4F$  пролетает комар со скоростью  $v = 9$  см/с. На каком расстоянии от зеркала находится изображение комара в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения комара в тот момент, когда комар будет пересекать главную оптическую ось линзы?

4. С помощью положительной линзы с фокусным расстоянием  $F = 15$  см получено мнимое изображение иголки, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением  $\Gamma_1 = 2$ . По другую сторону линзы перпендикулярно ее главной оптической оси установили плоское зеркало. Изображение иголки в системе линза – зеркало получилось с увеличением  $\Gamma_2 = 3$ . Определите расстояние от линзы до зеркала.

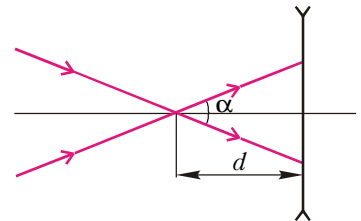


Рис. 11