

### 3. Законы сохранения в механике

#### 3.1. Импульс тела. Закон сохранения импульса

1. Импульсом  $\vec{p}$  материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы материальной точки  $m$  на вектор ее скорости  $\vec{V}$  :

$$\vec{p} = m\vec{V}.$$

Второй закон Ньютона в строгой формулировке записывается в виде

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F} \text{ при } \Delta t \rightarrow 0,$$

где  $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$  - изменение импульса за малое время  $\Delta t$ . Только в том случае, когда масса тела остается постоянной при движении, второй закон Ньютона можно записать в виде  $m\vec{a} = \vec{F}$ . Действительно, при  $m = \text{const}$  изменение импульса  $\Delta\vec{p} = m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = m\Delta\vec{V}$ . Тогда

$$\Delta\vec{p} / \Delta t = m\Delta\vec{V} / \Delta t = m\vec{a} = \vec{F}.$$

Импульсом  $\vec{P}$  системы материальных точек называют векторную сумму импульсов всех материальных точек, входящих в систему:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots$$

2. Все силы, действующие на тела системы, можно разделить на два класса: 1) внутренние силы – силы взаимодействия между телами, входящими в систему, 2) внешние силы – силы, действующие на тела системы со стороны тел, которые в систему не входят. Выбор системы материальных точек произволен (как произволен, например, выбор координатных осей). Однако после того как система выбрана, все силы распадутся на два класса: внешние и внутренние.

Для каждой материальной точки, входящей в систему, можно записать второй закон Ньютона, а затем просуммировать полученные уравнения. В результате получим

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \dots) + (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{31} + \dots),$$

где  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$  - внешние силы,  $\vec{f}_{12}, \vec{f}_{21}, \vec{f}_{13}, \dots$  - внутренние силы:  $\vec{f}_{12}$  - сила, действующая на первую частицу со стороны второй,  $\vec{f}_{21}$  - сила, действующая на вторую частицу со стороны первой и т.д.. По третьему закону Ньютона силы взаимодействия между телами равны по модулю и противоположно направлены:

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}, \vec{f}_{13} = -\vec{f}_{31}, \dots$$

Поэтому в правой части записанного выше уравнения остается сумма только внешних сил:

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \dots$$

Это уравнение является важным обобщением второго закона Ньютона для системы материальных точек. Видно, что суммарный импульс системы изменяется только под действием внешних сил. Внутренние силы (силы взаимодействия между телами системы) не могут изменить суммарный импульс системы.

3. Система материальных тел называется замкнутой, если векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю. Для таких систем  $\Delta \vec{P} / \Delta t = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = 0$ . Это означает, что импульс замкнутой системы тел остается постоянным.

Таким образом мы приходим к формулировке закона сохранения импульса: в замкнутой системе векторная сумма импульсов всех тел, входящих в систему, остается постоянной при любых взаимодействиях тел этой системы между собой.

### Примеры решения задач

**Пример 3.1.** Шарик массой  $m$  подлетает по направлению нормали к стенке со скоростью  $V$ , ударяется о нее и отскакивает с такой же по величине скоростью. С какой средней силой  $F$  действовал шарик на стенку, если продолжительность удара равна  $\Delta t$ ?

#### Решение

Пусть ось  $X$  направлена по нормали к стенке (рис.3.1). Тогда по второму закону Ньютона

$$\frac{p_{2x} - p_{1x}}{\Delta t} = f_x,$$

где  $p_{1x}$  и  $p_{2x}$  - проекции импульса шарика на ось  $X$  до и после удара,  $f_x$  - проекция на ось  $X$  силы, действующей на шарик со стороны стенки во время удара. Учитывая, что  $p_{1x} = mV$ ,  $p_{2x} = -mV$ , получим  $f_x = -2mV / \Delta t$ . По третьему закону Ньютона со стороны шарика на стенку во время удара действовала сила

$$F_x = -f_x = 2mV / \Delta t.$$

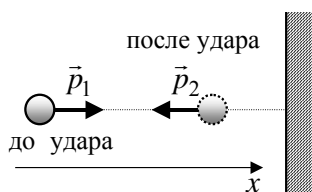


Рис. 3.1.

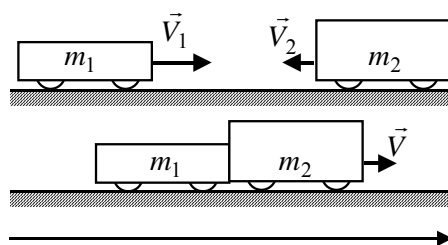


Рис. 3.2.

**Пример 3.2.** На горизонтальной поверхности сталкиваются две тележки массами  $m_1 = 2$  кг и  $m_2 = 4$  кг, движущиеся навстречу друг другу со скоростями  $V_1 = 2$  м/с и  $V_2 = 0,5$  м/с. При ударе тележки сцепляются и движутся далее, как единое целое (такой удар называют абсолютно неупругим). Определите скорость  $V$  совместного движения тележек после столкновения.

Решение

Импульс системы двух тележек в результате соударения не изменился. Поэтому:

$$m_1V_1 - m_2V_2 = (m_1 + m_2)V_x,$$

где  $V_x$  - проекция скорости тележек после соударения на горизонтальную ось  $X$  (см. рис.3.2). Следовательно

$$V_x = \frac{m_1V_1 - m_2V_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{3} \text{ м/с.}$$

**Пример 3.3.** Тележка с песком массой  $M$  движется по горизонтальной поверхности со скоростью  $V_1$ . На тележку вертикально падает груз массой  $m$  и застревает в песке. С какой скоростью  $V$  после этого будет двигаться тележка?

Решение

Рассматривая систему «тележка-груз», заметим, что внешние силы, действующие на эту систему (силы тяжести и реакции опоры), направлены вертикально. Поэтому проекции внешних сил на горизонтальную ось  $X$ , вдоль которой движется тележка, равны нулю и, следовательно, проекция импульса системы на ось  $X$  не изменяется:

$$x: \quad MV_1 = (M + m)V .$$

Отсюда

$$V = \frac{MV_1}{M + m} .$$

**Пример 3.4.** Тележка с песком массой  $M = 20$  кг движется по горизонтальной поверхности со скоростью  $V_1 = 1$  м/с. В тележку попадает камень массой  $m = 0,5$  кг и застревает в песке. Вектор скорости камня  $\vec{V}_2$  непосредственно перед ударом составляет угол  $\alpha = 60^\circ$  с вектором  $\vec{V}_1$  и лежит с ним в одной вертикальной плоскости (рис.3.3), а величина скорости камня  $V_2 = 12$  м/с. С какой скоростью  $V$  будет двигаться тележка после соударения?

Решение

Направим ось  $x$  горизонтально вдоль вектора скорости тележки. На систему «камень-тележка» действуют внешние силы: сила тяжести и сила реакции опоры. Проекция этих сил на ось  $x$  равны нулю. Следовательно, проекция импульса системы на эту ось остается неизменной:

$$x: \quad MV_1 + mV_2 \cos \alpha = (M + m)V .$$

Из этого уравнения найдем

$$V = \frac{MV_1 + mV_2 \cos \alpha}{M + m} = 1.12 \text{ м/с} .$$

**Пример 3.5.** Шарики массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся со взаимно перпендикулярными скоростями  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$ . В результате столкновения первый

шарик остановился. Найдите величину  $V$  скорости второго шарика после удара и угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{V}$  и  $\vec{V}_2$ .

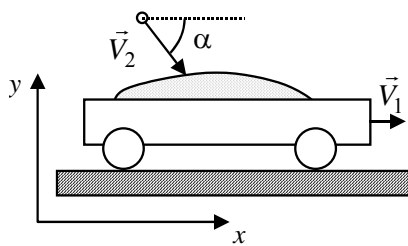


Рис. 3.3.

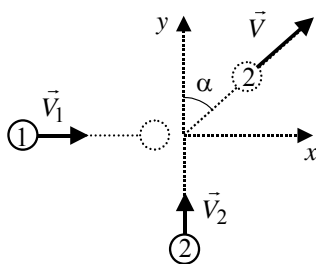


Рис. 3.4.

Решение

Проекция вектора импульса системы шариков на взаимно перпендикулярные оси  $x$  и  $y$  (рис.3.4) в результате столкновения не изменились:

$$x: m_1 V_1 = m_2 V_x,$$

$$y: m_2 V_2 = m_2 V_y.$$

Получаем:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2} V_1\right)^2 + V_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_x}{V_y} = \frac{m_1 V_1}{m_2 V_2}.$$