# Теплоемкость равновесных тепловых процессов

В.МОЖАЕВ

Теплоемкостью $C$ тела (в газообразном, жидком или твердом состоянии) называют отношение бесконечно малого количества теплоты $\Delta Q$, полученного этим телом, к соответствующему приращению температуры $\Delta T$:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

В случае единичной массы тела теплоемкость называют удельной, а если масса тела равна массе одного моля, то говорят о молярной теплоемкости.

В этой статье речь пойдет о теплоемкости идеального газа.

Следует подчеркнуть, что теплоемкость не является функцией состояния тела, а характеризует процесс, по которому тело из состояния с температурой $T$ переходит в состояние с температурой $T + \Delta T$. Например, если такой переход происходит при постоянном объеме, то это будет теплоемкость при постоянном объеме:

$$C_V = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_V.$$

В случае изобарического процесса мы имеем дело с теплоемкостью при постоянном давлении:

$$C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_p.$$

В одних процессах теплоемкость остается постоянной и не зависит от параметров, характеризующих состояние тела (такие процессы называют политропическими), а в других процессах теплоемкость может непрерывно изменяться и даже испытывать скачки.

Рассмотрим на конкретных примерах поведение теплоемкости идеального газа в различных тепловых процессах.

**Задача 1.** *Найдите молярную теплоемкость одноатомного идеального газа для процесса, в котором давление p пропорционально объему V.*

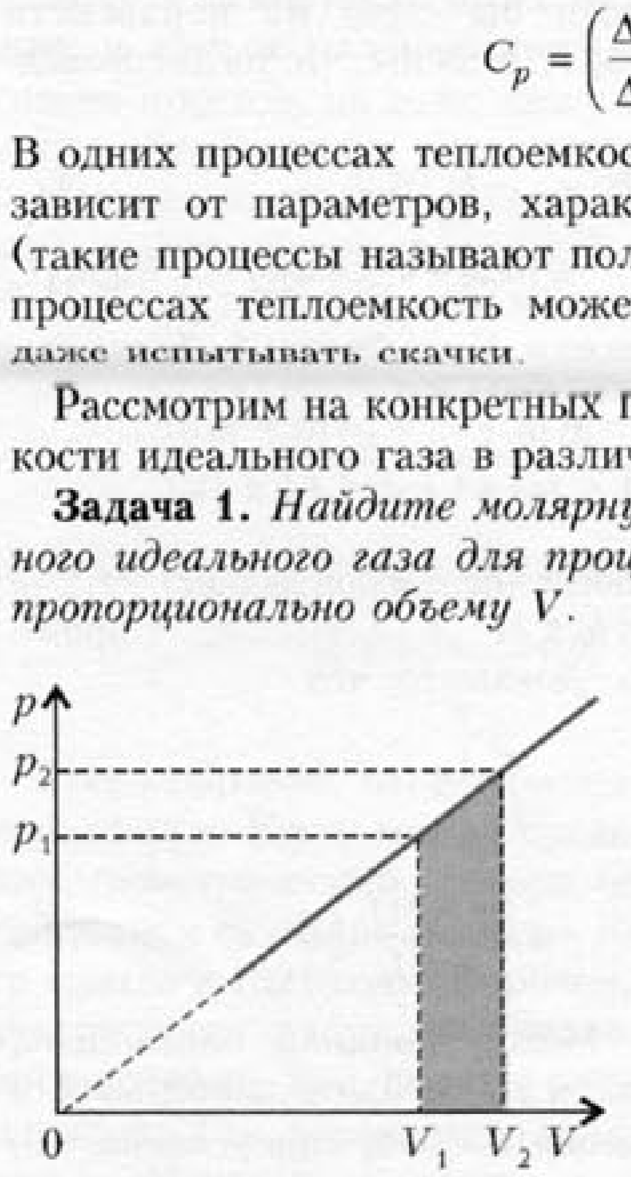


Рис. 1

Запишем уравнение такого процесса:

$$p = \alpha V,$$

где $\alpha$ – некоторая положительная константа. Этот процесс изображен прямой линией на рисунке 1.

Пусть один моль одноатомного идеального газа находится в равновесном состоянии *1*, которое принадлежит данной прямой. Параметры газа в этом состоянии: объем $V_1$ и давление $p_1$. Подведем к газу небольшое количество теплоты $\Delta Q$, и газ перейдет в новое состояние *2* с параметрами $V_2$ и $p_2$. При этом все промежуточные состояния, так же, как и состояние *2*, лежат на данной прямой. По первому началу термодинамики, подведенное количество теплоты частично пошло на изменение внутренней энергии газа, а частично – на работу, которую совершил газ против внешних сил:

$$\Delta Q = \Delta U + A = C_V\left(T_2 - T_1\right) + A.$$

Здесь $T_1$ и $T_2$ – температуры газа в состояниях *1* и *2*. Работа, совершенная газом, численно равна площади трапеции, выделенной на рисунке 1:

$$A = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{2} = \frac{R(T_2 - T_1)}{2}.$$

При записи этой цепочки равенств был использован тот факт, что $p_1V_2 = p_2V_1$ (из подобия соответствующих треугольников), а также уравнение состояния $pV = RT$, где $R$ – универсальная газовая постоянная. После подстановки выражения для $A$ в уравнение первого начала термодинамики получим

$$\Delta Q = \left(C_V + \frac{R}{2}\right)(T_2 - T_1).$$

По определению теплоемкости,

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta Q}{T_2 - T_1} = C_V + \frac{R}{2}.$$

Для одноатомного газа $C_V = \frac{3}{2}R$, поэтому окончательно

$$C = 2R.$$

Сделаем некоторые замечания.

1. Надо прекрасно понимать, что полученный результат имеет смысл только для таких параметров $p$ и $V$, при которых газ можно считать идеальным.

2. Если внимательно посмотреть на полученный результат $C = C_V + R/2$ и вспомнить, что $C_p = C_V + R$, то можно заметить, что наша теплоемкость $C$ равна среднему значению между $C_p$ и $C_V$: $C = \frac{C_p + C_V}{2}$.

3. Единственным параметром, изменяющим характер теплового процесса, в нашем случае является тангенс угла наклона прямой $\alpha$. Но наша теплоемкость не зависит от $\alpha$, и мы оказываемся на «необитаемом острове» и никак не можем достигнуть ни $C_p$ ни $C_V$. С математической точки зрения, так оно и есть: изменяя только один параметр $\alpha$, мы не сможем перейти к процессам $V$ = const или $p$ = const. Промежуточным процессом, позволяющим перейти от нашего процесса к изохорному или изобарному процессам, является процесс $p = \alpha V + \beta$ (см. в Упражнениях задачу 1).

**Задача 2.** *Используя первое начало термодинамики, уравнение состояния и выражение для внутренней энергии идеального газа, получите уравнение ( например, в координатах p и V) такого процесса, в котором молярная теплоемкость газа постоянна и равна C.*

Рассмотрим один моль идеального газа, молярная теплоемкость которого постоянна и равна $C$. Пусть этот газ находится в равновесном состоянии с параметрами $p$, $V$ и $T$, которые связаны между собой уравнением состояния

$$pV = RT.$$

Подведем к газу небольшое количество теплоты $\Delta Q$. Это тепло пойдет на изменение внутренней энергии газа и на работу, которую совершит газ при своем расширении:

$$\Delta Q = C_V \Delta T + p\Delta V .$$

С другой стороны,

$$\Delta Q = C\Delta T .$$

Отсюда получим

$$\left(C - C_V\right)\Delta T = p\Delta V ,$$

или

$$\left(C - C_V\right)\Delta T = \frac{RT}{V}\Delta V .$$

Разделим переменные $T$ и $V$:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{R}{C - C_V}\frac{\Delta V}{V} .$$

Проинтегрируем обе части данного уравнения и получим

$$\ln T = \frac{R}{C - C_V}\ln V + \text{const} ,$$

или, проведя соответствующие математические преобразования,

$$TV^{\frac{R}{C_V - C}} = \text{const} .$$

Константа в последнем уравнении не равна константе в предыдущем уравнении, но это не имеет никакого значения.

Мы получили уравнение процесса с постоянной молярной теплоемкостью $C$ в переменных $T$ и $V$. Найдем эквивалентное выражение данного процесса в переменных $p$ и $V$. Для этого воспользуемся выражением для температуры из уравнения состояния: $T = \dfrac{pV}{R}$ и получим

$$pV^{\frac{C - C_V - R}{C - C_V}} = \text{const} .$$

Процессы с постоянной теплоемкостью называют политропическими процессами, а последние два уравнения – уравнениями политропы. Рассмотрим известные процессы с постоянной теплоемкостью:

1) если $C = C_V$, то из уравнения политропы получим, что $V = \text{const}$, т.е. процесс идет при постоянном объеме (изохорный процесс);

2) если $C = C_p = C_V + R$, то $p = \text{const}$ (изобарный процесс);

3) если $C = \infty$, то $T = \text{const}$ (изотермический процесс);

4) если $C = 0$, то $pV^{\frac{C_V + R}{C_V}} = \text{const}$ – это уравнение адиабатического процесса.

**Задача 3.** *Найдите теплоемкость системы, состоящей из закрытого цилиндрического сосуда, в котором расположен подвижный поршень (рис.2). Справа от поршня сосуд заполнен одноатомным идеальным газом с параметрами $T_0, p_0, V_0$, а слева от поршня – вакуум. Поршень удерживается упругой пружиной. Если газ справа откачать, то поршень будет соприкасаться с правой стенкой сосуда, а пружина не будет деформирована. Теплоемкостями сосуда, поршня и пружины пренебречь.*

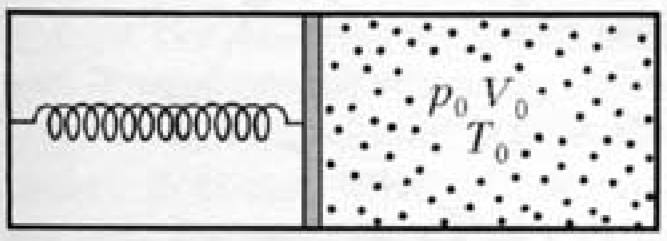


Рис. 2

Из заданного равновесного состояния найдем жесткость пружины $k$. Для этого запишем условие неподвижности поршня:

$$k\frac{V_0}{S} = p_0 S ,$$

где $S$ – площадь поперечного сечения сосуда. Отсюда

$$k = \frac{p_0 S^2}{V_0} .$$

Если от газа отвести некоторое количество теплоты, то поршень сместится вправо и займет новое положение равновесия с объемом $V$ и давлением $p$. Новое условие неподвижности поршня будет иметь вид

$$k\frac{V}{S} = pS .$$

После подстановки в это уравнение выражения для жесткости $k$ получим

$$pV^{-1} = \frac{p_0}{V_0} = \text{const} .$$

Это уравнение показывает, что данный процесс является политропическим процессом. Приравнивая показатель степени объема в уравнении политропы к минус единице, найдем молярную теплоемкость данного процесса:

$$\frac{C - C_V - R}{C - C_V} = -1 \text{, откуда } C = C_V + \frac{R}{2} .$$

Для одноатомного газа $C_V = \dfrac{3}{2}R$, поэтому $C = 2R$. Но это молярная теплоемкость, а число молей нашего газа равно

$$\nu = \frac{p_0 V_0}{RT_0} .$$

Итак, теплоемкость системы, т.е. всего газа, равна

$$C_{\text{сист}} = C\nu = \frac{2p_0 V_0}{T_0} .$$

**Задача 4.** *Боковые стенки цилиндра $AC$ и $BD$, его крышка $CD$ и невесомый поршень $MN$ выполнены из материала, не проводящего тепло (рис.3). Дно $AB$ проводит тепло. Поршень может перемещаться в цилиндре без трения. Сверху и снизу от поршня находится по одному молю одноатомного идеального газа. Тепло может подводиться к газу (или отводиться от газа) в нижней части цилиндра через дно $AB$. Выразите теплоемкость $C_1$ нижнего газа через объемы газов $V_1$ и $V_2$. Чему равна при этом теплоемкость $C_2$ верхнего газа?*

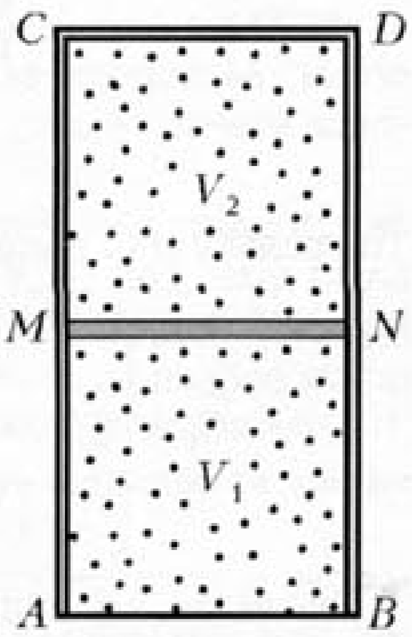


Рис. 3

В исходном состоянии нижний газ занимает объем $V_1$, имеет некоторое давление $p$ и некоторую температуру $T_1$, а верхний газ занимает объем $V_2$, его давление также $p$, а температура $T_2$.

Пусть через дно $AB$ в сосуд подвели небольшое количество теплоты $\Delta Q$. Очевидно, что это тепло поступит только к нижнему газу, поскольку поршень $MN$ не проводит тепло. Следовательно, мы можем записать

$$\Delta Q = C_1 \Delta T_1 ,$$

где $C_1$ – теплоемкость, а $\Delta T_1$ – изменение температуры нижнего газа. По первому началу термодинамики,

$$C_1 \Delta T_1 = C_V \Delta T_1 + p\Delta V_1 .$$

Из уравнения состояния найдем связь бесконечно малых приращений параметров нижнего газа $\Delta T_1$, $\Delta V_1$, и $\Delta p$:

$$\Delta\left(pV_1\right) = R\Delta T_1 \text{, или } \Delta p V_1 + p\Delta V_1 = R\Delta T_1 .$$

Теперь обратимся к верхнему газу. Над этим газом совершается адиабатический процесс. В задаче 2 было получено уравнение такого процесса (когда теплоемкость равна нулю):

$$pV_2^{\frac{C_V+R}{C_V}} = \text{const}\ .$$

Обозначим показатель степени при $V_2$ через $\gamma$:

$$\gamma = \frac{C_V + R}{C_V}$$

и возьмем бесконечно малое приращение от обеих частей уравнения адиабаты:

$$\Delta\left(pV_2^{\gamma}\right) = 0\ .$$

Проведя дифференцирование произведения двух функций, получим

$$\Delta pV_2^{\gamma} + \gamma pV_2^{\gamma-1}\Delta V_2 = 0\ ,$$

или, после сокращения на $V_2^{\gamma-1}$,

$$\Delta pV_2 + \gamma p\Delta V_2 = 0\ .$$

Отсюда, поскольку $\Delta V_2 = -\Delta V_1$, найдем

$$\Delta p = \gamma p\frac{\Delta V_1}{V_2}\ .$$

Воспользуемся тем, что приращения давления для нижнего и верхнего газов одинаковы, и получим

$$\gamma p\frac{V_1}{V_2}\Delta V_1 + p\Delta V_1 = R\Delta T_1\ ,$$

откуда

$$\Delta V_1 = \frac{R\Delta T_1}{p\left(1 + \gamma\frac{V_1}{V_2}\right)}\ .$$

Затем из первого начала термодинамики найдем теплоемкость нижнего газа:

$$C_1 = C_V + \frac{R}{\left(1 + \gamma\frac{V_1}{V_2}\right)}\ .$$

Поскольку для одноатомного газа $C_V = \frac{3}{2}R$, а $\gamma = \frac{5}{3}$, то

$$C_1 = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{3}\frac{V_1}{V_2}\right)}\right)R = \frac{15}{2}\frac{(V_1 + V_2)}{(5V_1 + 3V_2)}R\ .$$

Очевидно, что при этом теплоемкость верхнего газа $C_2 = 0$ (адиабатический процесс).

**Задача 5.** *Найдите объем и температуру, при которых теплоемкость одного моля идеального газа в процессе* $p = p_0 - \frac{p_0}{V_0}V$ *равна бесконечности.*

Уравнение заданного процесса в координатах $p$ и $V$ является уравнением прямой, которая изображена на рисунке 4. Если решать задачу в общем виде, то нужно найти зависимость теплоемкости данного процесса от объема, а затем посмотреть, при каком значении объема она стремится к бесконечности. Такой способ решения предложим читателю в качестве самостоятельного упражнения, а сами пойдем по другому пути.

Известен такой процесс, при котором теплоемкость равна бесконечности. Это – изотермический процесс. Следовательно, если на нашей прямой есть такая точка, в которой одна из изотерм касается прямой, то в окрестности этой точки изотерма апроксимируется прямой, а теплоемкость в этой точке равна бесконечности.

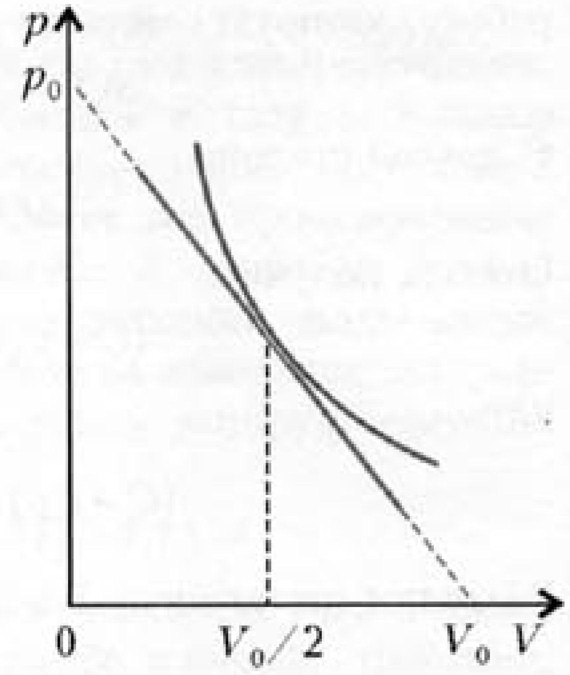

Рис. 4

Запишем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} pV = RT, \\ p = p_0 - \dfrac{p_0}{V_0}V. \end{cases}$$

Будем искать совместные решения этой системы относительно объема $V$. Исключив $p$, получим квадратное уравнение

$$V^2 - V_0V + \frac{V_0RT}{p_0} = 0\ .$$

В общем случае это уравнение имеет два корня:

$$V_{1,2} = \frac{V_0}{2} \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{4} - \frac{V_0RT}{p_0}}\ .$$

Нас интересует ситуация, когда изотерма касается прямой, а в этом случае система уравнений должна иметь один корень, т.е. подкоренное выражение должно быть равно нулю:

$$\frac{V_0^2}{4} - \frac{V_0RT}{p_0} = 0\ .$$

Отсюда мы находим температуру, при которой теплоемкость становится равной бесконечности:

$$T_\infty = \frac{p_0V_0}{4R}\ ,$$

и значение объема для этого состояния:

$$V_\infty = \frac{V_0}{2}\ .$$

Именно эта ситуация и изображена на рисунке 4.

**Упражнения**

**1.** Вычислите зависимость молярной теплоемкости одноатомного идеального газа от его объема для процесса, в котором давление линейно зависит от объема: $p = \alpha V + \beta$, где $\alpha$ и $\beta$ – константы, $\alpha > 0$.

**2.** Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону $pV^2 = \text{const}$? Какова молярная теплоемкость газа в этом процессе?

**3.** При некотором политропическом процессе гелий был сжат от начального объема 4 л до конечного объема 1 л. Давление при этом возросло от 1 атм до 8 атм. Найдите теплоемкость гелия, если его начальная температура была 300 К.

**4.** Моль гелия расширяется из начального состояния *1* в конечное состояние *3* в двух процессах (рис.5). Сначала расширение идет в процессе *1–2* с постоянной теплоемкостью $C = \frac{3}{4}R$. Затем газ расширяется в процессе *2–3*, когда его давление $p$ прямо пропорционально объему $V$. Найдите работу, совершенную газом в процессе *1–2*, если в процессе *2–3* он совершил работу $A$. Температуры начального и конечного состояний равны.

Рис. 5

Допустим сначала, что числа $a_1,\ldots,a_k$ и $b_1,\ldots,b_k$ положительны. Тогда мы вправе рассмотреть квазимногочлен

$$f(x)=\left(a_0^2\right)^x\left(b_0^2\right)^{1-x}-\left(a_1^2\right)^x\left(b_1^2\right)^{1-x}-\ldots-\left(a_k^2\right)^x\left(b_k^2\right)^{1-x}-$$
$$-\left(a_0^2-a_1^2-\ldots-a_k^2\right)^x\left(b_0^2-b_1^2-\ldots-b_k^2\right)^{1-x}.$$

Он имеет два корня $x=1$ и $x=0$ и, значит, положителен при $x=1/2$. Случай, когда не все числа $a_1,\ldots,a_k$ и $b_1,\ldots,b_k$ положительны, легко сводится к уже рассмотренному.

**24.** Для доказательства правого неравенства нужно рассмотреть квазимногочлен

$$f(x)=(4a+1)^x+(4b+1)^x+(4c+1)^x+(4d+1)^x-4\cdot 2^x,$$

а для доказательства левого – квазимногочлен

$$g(x)=3-(4a+1)^x-(4b+1)^x-(4c+1)^x-(4d+1)^x+5^x.$$

**25.** Если мы положим $p_i=\dfrac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2}$, то увидим, что доказываемое неравенство обобщает неравенство Швейцера.

**26.** Их условия задачи легко следует, что для любого $i=1,2,\ldots,n$ выполняются неравенства $a_i\le\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}$. Поэтому последовательность коэффициентов квазимногочлена

$$f(x)=(n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^x-a_1^x-a_2^x-\ldots-a_n^x+\left(\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}\right)^x$$

содержит две перемены знака. Коэффициенты подобраны так, что значения квазимногочлена равны нулю в точках 0 и 2. Значит, его производная в точке ноль неположительна. Это дает нижнюю оценку произведения, которая достигается, когда квазимногочлен обращается в тождественный ноль, т.е., когда все числа $a_i$, кроме одного, равны $1/n$, а это последнее равно $\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}$. Таким образом находится наименьшее значение. Наибольшее находится из неравенства Коши.

## ТЕПЛОЕМКОСТЬ РАВНОВЕСНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

**1.** $C=C_p-\dfrac{\alpha RV}{\beta+2\alpha V}$, где $C_p$ – молярная теплоемкость при постоянном давлении.

**2.** Газ охлаждается; $C=C_V-R$, где $C_V$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

**3.** $C=\nu\left(3C_V-2C_p\right)=-0{,}677$ Дж/К, где $\nu=\dfrac{p_1V_1}{RT_1}=0{,}163$ моль – количество молей гелия, $C_V=\dfrac{3}{2}R$ и $C_p=\dfrac{5}{2}R$.

**4.** $A_{12}=\dfrac{3}{2}A$.

## XIII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

*Письменный индивидуальный тур*

*Математика*

**1.** а) Может. Например, $111111111^2=12345678987654321$.
б) Нет. Если число оканчивается на 789, то при делении на 8 оно дает в остатке 5, а квадраты нечетных чисел дают остаток 1 при делении на 8.

**2.** $2R\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

**3.** $\left(1;0;\sqrt{2}\right)$. *Указание.* Из неравенства $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$, справедливого при любых $a$ и $b$, следует, что левая часть уравнения не больше чем 3, причем равенство возможно лишь при $x=\sqrt{1-y^2}$, $y=\sqrt{2-z^2}$, $z=\sqrt{3-x^2}$.

**4.** а) 3; б) 2 и 8. *Указания.* а) Первое число Фибоначчи, делящееся на 9, это $f_{12}=144$, причем на 9 делятся все числа вида $f_{12n}$, но они же (и только они) делятся на 16.
б) На 16 делятся числа вида $f_{12n}$, но они же делятся на 9.

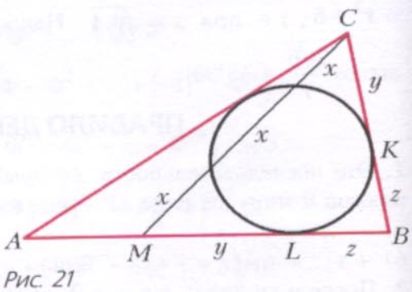

Рис. 21

**5.** а) Нет; б) может; в) нет. *Указание* (рис. 21). а) Если $CM$ – высота, то $CK^2=2x^2$, $ML=2x^2$, откуда $CK=ML$, но тогда $BC=MB$, что невозможно.
б) Если $CM$ – медиана, то по формуле для медианы

$$9x^2=\frac{1}{4}\left(2(3y+z)^2+2(y+z)^2-4(y+z)^2\right).$$

А так как $y^2=2x^2$, имеем после преобразований $y=4z$. Пусть $z=1$, тогда $y=4$. Отсюда $AB=10$, $AC=13$, $BC=5$. Осталось убедиться в том, что медиана $CM$ делится вписанной окружностью на равные части.
в) Если $CM$ – биссектриса, то $\angle CMB=\angle ACM$, что невозможно.

**6.** $-\left[\dfrac{n}{2}\right]$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что

$$\sum_{n\ge i>j\ge 1}x_ix_j=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{2}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{2}x_i^2}{2}\ge-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ge-\frac{n}{2}.$$

При четном $n=2k$ минимум достигается, например, при $x_{2i-1}=1$, $x_{2i}=0$. При нечетном – при $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$, …, $x_n=0$.

**7.** а) Нет; б) нет; в) и г) да. *Указание.* Предположим, что лист бумаги удалось разрезать на фигурки нужного вида. Покрасим черным цветом клетки листа, как показано на рисунке 22. Каждая из фигурок содержит не более одной покрашенной клетки. Пусть $x$ – число «уголков», а $y$ – число «зигзагов». Тогда $x+y\ge n^2$, $3x+4y=(2n-1)^2$, откуда $x\ge 4n-1$. Отсюда следует, что требуемых разрезаний не существует при $n=2$ и $n=3$. Например, при $n=3$ потребовалось бы не меньше 11 «уголков». Однако в квадрате $5\times5$ всего 25 клеток. Если $n=4$, то $x\ge15$. Значит, для квадрата $7\times7$ понадобится в точности 15 уголков и 1 «зигзаг». Такое разрезание возможно (рис.23). Как «продолжить» разрезания на большие $n$, показано на том же рисунке.

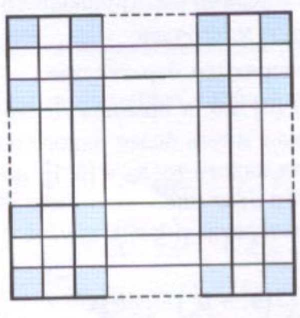
Рис. 22

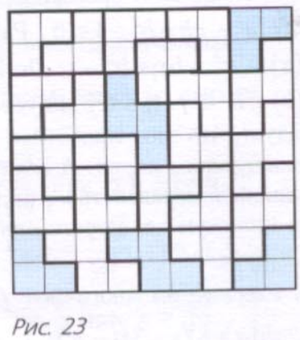
Рис. 23